VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

FAKULTA STAVEBNÍ

MATEMATIKA I

MODUL BA01_M04, GA01_M03

REÁLNÁ FUNKCE JEDNÉ REÁLNÉ PROMĚNNÉ

STUDIJNÍ OPORY
PRO STUDIJNÍ PROGRAMY S KOMBINOVANOU FORMOU STUDIA

[0]Typeset by $\LaTeX\,2_\varepsilon$

Obsah

Kapitola 1

Úvod

1.1 Cíle

V tomto modulu jsou obsaženy základní pojmy z teorie reálné funkce jedné reálné proměnné. Jen stručně si připomeneme některé základní vlastnosti funkcí, které jsou probírány na středních školách. Uvedeme si různé způsoby zadání funkcí a možnosti jejich grafického znázornění pomocí kartézského grafu funkce. Zavedeme takové pojmy, jako je *funkce složená* a *funkce inverzní*. Těžiště modulu bude spočívat ve zvládnutí elementárních funkcí, které budou studenti používat v navazujících modulech matematiky, fyziky, mechaniky a dalších předmětech vyučovaných na fakultě. Rozebereme podrobněji obsah jednotlivých odstavců modulu:

2.1 Po zopakování základních pojmů z teorie reálné funkce jedné reálné proměnné je uvedená tabulka elementárních funkcí, které jste již probírali na střední škole. Je potřebné znát grafy těchto funkcí, abychom mohli v dalších ostavcích studovat jejich vlastnosti (některé z těchto funkcí jsou zopakovány v odstavci 8).

2.2 Vzhledem k tomu, že v mnohých dalších partiích matematické analýzy se budeme setkávat s absolutní hodnotou (například v integrálním počtu), věnujeme se jejímu procvičení v tomto odstavci. Musíte umět určit grafy jednoduchých funkcí s absolutní hodnotou. Promyslete si také uvedené vlastnosti absolutních hodnot.

2.3 Měli byste umět určovat definiční obory složených funkcí a pro jednodušší složené funkce nakreslit jejich grafy především s využitím transformací posunutí.

2.4 Ve tvaru tabulky jsou přehledně shrnuty základní vlastnosti funkcí. Měli byste jim dobře porozumět, protože v dalších úvahách budeme s těmito pojmy stále pracovat. Pro kontrolu porozumění základním vlastnostem funkcí je zařazen autotest, který si pečlivě vyřešte.

2.5 Seznámíte se s parametrickým zadáním funkce. Zapamatujte si dobře parametrizaci kružnice, elipsy, cykloidy, úsečky. Budete je využívat při řešení úloh na geometrické a technické aplikace určitého integrálu a u křivkových integrálů.

2.6 Jde o důležitou problematiku inverzních funkcí. Detailně si projděte vyřešený příklad a na základě dobrého porozumění řešte příklady ze cvičení.

2.7 Opět jde o velmi důležitou problematiku. Je zapotřebí umět dělit polynomy, určovat kořeny polynomu a jejich rozklady v reálném oboru s využitím Hornerova schématu a základních vlastností polynomu. Porozumět násobnosti kořenů polynomu a určování znaménka. Nejdůležitejší problematikou je pak rozklad racionálních funkcí na parciální zlomky. Dobré zvládnutí této problematiky je nezbytné pro pozdější integrování. Proto se snažte uvedený autotest vyřešit se stoprocentní úspěšností.

2.8 Jsou stručně zopakovány goniometrické funkce a jejich vlastnosti a zavedeny cyklometrické funkce jako funkce inverzní ke goniometrickým. Po připomenutí funkcí exponenciálních a logaritmických jsou shrnuty jejich základní vlastnosti. Jejich užitím jsou zavedeny hyperbolické a hyperbolometrické funkce. Měli byste znát jejich grafy a tím i jejich definiční obory a základní vlastnosti.

1.2 Požadované znalosti

Pro potřeby zvládnutí tohoto modulu předpokládáme znalosti studentů v rozsahu látky, která je probírána na středních školách a do jisté míry zkoušena u přijímacích zkoušek na fakultu.

1.3 Doba potřebná ke studiu

Čas potřebný ke zvládnutí tohoto modulu je odhadnut pro *průměrného studenta* jako hodnota nejméně 24 hodin.

1.4 Klíčová slova

Funkce, funkce složená, parametrické zadání funkce, funkce inverzní, polynom, racionální funkce, elementární funkce.

Problémem tohoto úvodního modulu je skutečnost, že potenciálních *klíčových slov* je poměrně velké množství. Proto je na konci modulu zařazen *Rejstřík*, ve kterém jsou klíčová slova přehledně uspořádána i s odkazy na odpovídající stránky.

1.5 Metodický návod k práci s textem

Učební text je napsán velmi přístupným způsobem. Výrazně jsme omezili strohý způsob výkladu prováděný formou definice–věta–důkaz, který je většinou obvyklý v matematické literatuře. Doufáme, že se vám modul bude příjemně studovat a že se vám podaří rychle tuto problematiku zvládnout. Je přitom nutné si uvědomit, že v tomto modulu jsou vyloženy nejzákladnější pojmy matematické analýzy, které je pro další studium nezbytné dobře pochopit. K tomu vám poslouží výběr příkladů ve cvičeních a autotestech. Soubory úloh je potřebné považovat za minimální. Na nich byste si měli ověřit, zda jste pochopili základní pojmy a tvrzení o nich. Připomínáme, že v autotestech může být správně i více uváděných výsledků, ale vždy je správný alespoň jeden výsledek. Nesnažte se správné odpovědi pouze odhadovat. Naopak, nejprve si projděte příklady řešené v textu a na základě jejich pochopení si detailně vypočtěte příklady ve cvičeních i autotestech. Každý krok i výsledný závěr si důkladně zdůvodněte. Pro získání početní zručnosti a větší zkušenosti je potřebné si vyřešit dostatečný počet dalších příkladů ze sbírky, uvedené v seznamu literatury.

1.6 Označení

Přehled základních užívaných pojmů a označení

Logické spojky a kvantifikátory

označení	**název**	**čteme**
$\wedge$	konjunkce	a
$P \wedge Q$		platí P i Q
$\vee$	alternativa (disjunkce)	nebo
$P \vee Q$		platí P nebo Q
$\Rightarrow$	implikace	implikuje (vyplývá)
$P \Rightarrow Q$		jestliže platí P, pak platí Q z P plyne Q P je postačující pro Q
$\Leftrightarrow$	ekvivalence	právě když P platí právě tehdy, když platí Q P je nutné a stačí pro Q
$\forall$	obecný kvantifikátor	pro všechna
$\forall x \in M; V(x)$		pro každý prvek $x \in M$ platí $V(x)$ každý prvek $x \in M$ má vlastnost $V(x)$
$\exists$	existenční kvantifikátor	existuje
$\exists x \in M; V(x)$		existuje prvek $x \in M$ s vlastností $V(x)$
$\exists!$		existuje právě jedno
$\exists! x \in M; V(x)$		existuje právě jeden prvek $x \in M$ s vlastností $V(x)$

Množinová symbolika

označení	**čteme**
$x \in A$	x je prvkem množiny A
$x \notin A$	x není prvkem množiny A
$\{x \in A;\, V(x)\}$	množina všech prvků množiny A, které mají vlastnost $V(x)$
$\emptyset$	prázdná množina
$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$	množina A je určená prvky $a_1, a_2, \dots, a_n$
$A = B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A) \Leftrightarrow (x \in B)$	rovnost množin množiny A, B obsahují tytéž prvky
$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A) \Rightarrow (x \in B)$	A je podmnožina B každý prvek množiny A je také prvkem množiny B
$A \cup B = \{x; (x \in A) \vee (x \in B)\}$	sjednocení množin A, B množina obsahující všechny prvky množiny A i množiny B
$A \cap B = \{x; (x \in A) \wedge (x \in B)\}$	průnik množin A, B množina těch prvků, které patří současně do množiny A i do množiny B
$A - B = \{x; (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$	rozdíl množin A, B množina těch prvků množiny A, které nepatří do množiny B
$A \times B = \{(a, b); (a \in A) \wedge (b \in B)\}$	kartézský součin množin A, B množina všech uspořádaných dvojic (a, b) takových, že $a \in A, b \in B$

Číselná osa a její podmnožiny

označení	**čteme**
$\mathbb{N} = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$	množina přirozených čísel
$\mathbb{Z} = \{\dots, -n, -n+1, \dots, -1, 0, 1, 1, 2, \dots, n, \dots\}$,	množina celých čísel, $n \in \mathbb{N}$
$\mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R};\, x = \frac{m}{n},\, m \in \mathbb{Z},\, n \in \mathbb{Z} - \{0\}\}$	množina racionálních čísel
$\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$	množina reálných čísel
$\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$	množina kladných reálných čísel
$\mathbb{R}_0^+ = \langle 0, \infty)$	množina nezáporných reálných čísel
$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\} = \langle -\infty, \infty \rangle$	množina reálných čísel rozšířená o nevlastní body

Intervaly

Předpokládáme $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$.

označení	**čteme**	
$\langle a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R};\ a \le x \le b\}$	uzavřený interval	a b
$(a, b) = \{x \in \mathbb{R};\ a < x < b\}$	otevřený interval	a b
$(a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R};\ a < x \le b\}$	polouzavřený interval	a b
$\langle a, b) = \{x \in \mathbb{R};\ a \le x < b\}$	polouzavřený interval	a b
$\langle a, \infty) = \{x \in \mathbb{R};\ x \ge a\}$		a ∞
$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R};\ x > a\}$		a ∞
$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R};\ x < b\}$		$-\infty$ b
$(-\infty, b\rangle = \{x \in \mathbb{R};\ x \le b\}$		$-\infty$ b

Okolí bodu

Předpokládáme $x_0 \in \mathbb{R}, \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0, h \in \mathbb{R}$.

označení	**čteme**	
$\mathcal{U}(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$	δ–okolí bodu x_0	$x_0 - \delta$ x_0 $x_0 + \delta$
$\mathcal{P}(x_0, \delta) = \mathcal{U}(x_0, \delta) - \{x_0\}$	prstencové (ryzí) δ–okolí bodu x_0	$x_0 - \delta$ x_0 $x_0 + \delta$
$\mathcal{U}^+(x_0, \delta) = \langle x_0, x_0 + \delta)$	pravé δ–okolí bodu x_0	x_0 $x_0 + \delta$
$\mathcal{U}^-(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0\rangle$	levé δ–okolí bodu x_0	$x_0 - \delta$ x_0
$\mathcal{P}^+(x_0, \delta) = (x_0, x_0 + \delta)$	pravé prstencové δ–okolí bodu x_0	x_0 $x_0 + \delta$
$\mathcal{P}^-(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0)$	levé prstencové δ–okolí bodu x_0	$x_0 - \delta$ x_0

$\mathcal{U}(\infty, h) = \mathcal{P}(\infty, h) = \mathcal{U}^-(\infty, h) = \mathcal{P}^-(\infty, h) = (h, \infty)$	okolí bodu ∞
$\mathcal{U}(-\infty, h) = \mathcal{P}(-\infty, h) = \mathcal{U}^+(-\infty, h) = \mathcal{P}^+(-\infty, h) = (-\infty, h)$	okolí bodu $-\infty$

Kapitola 2

Reálná funkce jedné reálné proměnné

2.1 Pojem funkce

Při vysokoškolském studiu přírodovědných a technických předmětů se seznámíte s mnoha různě složitými funkčními vztahy. Připomeňme si některé jednodušší funkční závislosti, se kterými jste se setkali již na střední škole, a které budete i nadále využívat:

- plošný obsah rovnostranného trojúhelníka o straně a je roven $P = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$;
- objem koule o poloměru r je roven $V = \frac{4}{3}\pi r^3$,
- kinetická energie hmotného bodu o hmotnosti m, který se pohybuje rychlostí v je dána vztahem $E_k = \frac{1}{2}mv^2$;
- výchylka u z rovnovážné polohy harmonického pohybu je dána vztahem $u = u_m \sin(\omega t + \varphi_0)$, kde u_m, ω, φ_0 jsou konstantní veličiny;
- zobrazovací rovnice čočky je dána vztahem $1/a + 1/a' = 1/f$, kde a je předmětová vzdálenost, a' je obrazová vzdálenost, f je ohnisková vzdálenost čočky.

Funkční závislosti zde ukazují vztahy, kterými jsou mezi sebou vázány studované proměnné veličiny. Jestliže si odmyslíme geometrický, fyzikální nebo technický význam proměnných veličin, dostaneme se k matematické charakterizaci základního pojmu matematické analýzy – reálné funkci jedné reálné proměnné.

Definice 2.1.1: *Řekneme, že **funkčním předpisem** $y = f(x)$ je určena **reálná funkce** f **jedné reálné proměnné** x, jestliže*
a) je dán obor $A \subset \mathbf{E}_1$ „přípustných“ reálných hodnot nezávisle proměnné x,

b) každému $x \in A$ je přiřazena ***právě jedna*** *reálná hodnota závisle proměnné y dle funkčního předpisu $y = f(x)$.*

△

Uvedené zadání funkce f též nazýváme jejím ***explicitním zadáním*** a říkáme, že proměnná y je vyjádřena explicitně funkcí proměnné x. Množinu $A = D(f)$ nazýváme ***definičním oborem funkce*** f, množinu všech funkčních hodnot nazýváme ***oborem funkčních hodnot funkce*** f a značíme jej $H(f) = f(A)$. Funkci f pak často zapisujeme ve tvaru

$$f : y = f(x), \quad x \in A.$$

Pokud není definiční obor zadán, pak za něj budeme pokládat tzv. ***přirozený definiční obor***, což je množina všech reálných čísel, pro které má funkční předpis $y = f(x)$ smysl.

Z uvedené definice funkce vyplývá, že funkce f a g jsou si rovny (píšeme $f = g$), když 1) $D(f) = D(g) = A$, 2) $f(x) = g(x)$ pro každé $x \in A$.

Nyní si připomeneme funkční předpisy některých elementárních funkcí, s nimiž jste se seznámili na střední škole.

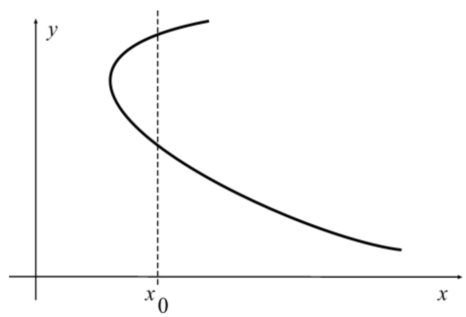
	předpis	**předpoklady**	**název**
1.	$y = k$	$k \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}$	konstantní funkce
2.	$y = ax + b$	$a, b \in \mathbb{R},\ a \neq 0,\ x \in \mathbb{R}$	lineární funkce
3.	$y = \|x\|$	$x \in \mathbb{R}$	absolutní hodnota
4.	$y = x^n$ $y = x^n = 1/x^{-n}$	$n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}$ $-n \in \mathbb{N}$ $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$	mocninná funkce s přirozeným exponentem (grafem je parabola n–tého stupně) mocninná funkce s celým záporným exponentem (grafem je tzv. hyperbola stupně n)
5.	$y = \sqrt[n]{x}$ $y = \sqrt[n]{x}$	$n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$ n sudé, $x \in \langle 0, \infty)$ $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$ n liché, $x \in \mathbb{R}$	n–tá odmocnina n–tá odmocnina
6.	$y = \sin x$	$x \in \mathbb{R}$	sinus
7.	$y = \cos x$	$x \in \mathbb{R}$	kosinus
8.	$y = \mathrm{tg}\ x$	$x \in \mathbb{R}, x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$ $k \in \mathbb{Z}$	tangens
9.	$y = \mathrm{cotg}\ x$	$x \in \mathbb{R}, x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$	kotangens
10.	$y = a^x$	$a > 0, a \neq 1, x \in \mathbb{R}$	exponenciální funkce o základu a
11.	$y = e^x$	$x \in \mathbb{R}, e = 2.71\ldots$	exponenciální funkce o základu e
12.	$y = \log_a x$	$a > 0, a \neq 1$ $x \in \mathbb{R}^+ = (0, \infty)$	logaritmická funkce o základu a
13.	$y = \ln x = \log_e x$	$x \in \mathbb{R}^+ = (0, \infty)$	přirozený logaritmus (o základu e)

2.2 Graf funkce

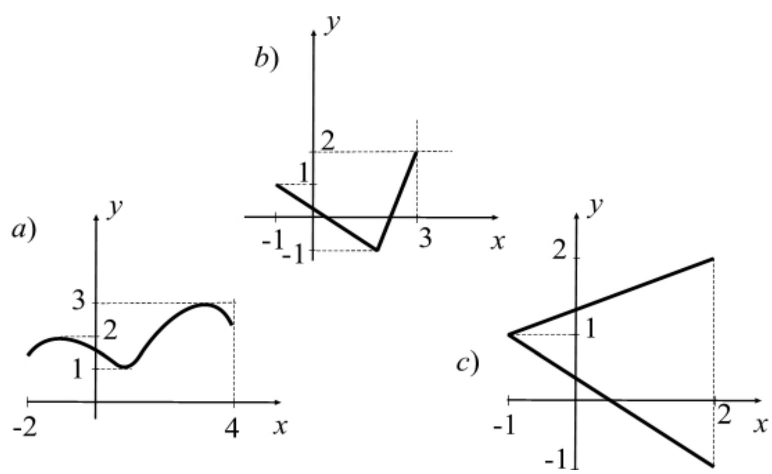
Zadanou funkci f si často znázorňujeme užitím (kartézského) grafu funkce f, který získáme jako množinu těch bodů $[x, y]$ v rovině (se zavedenou kartézskou – pravoúhlou soustavou souřadnic $\langle 0; x, y\rangle$), jejichž první souřadnice x je prvkem $D(f)$ a druhá souřadnice je rovna $y = f(x)$. Můžeme tedy psát

$$Grf = \text{graf } f := \{[x, y] \in \mathbf{E}_2;\ x \in D(f),\ y = f(x)\}.$$

Poznámka. Máme-li zjistit, zda zadaný graf je grafem nějaké explicitní funkce $y = f(x)$, pak stačí ověřit, že každá rovnoběžka s osou y protne graf nejvýše v jednom bodě. Jinak by totiž k nějakému prvku x_0 existovalo více různých funkčních hodnot, což je ve sporu s požadavkem jednoznačnosti, uvedeném v definici funkce.



Obrázek 2.1:



Obrázek 2.2:

Cvičení 2.2.1: Řešte příklady:

a) Rozhodněte, zda jde v Obr. 2.2 o grafy funkcí $f : y = f(x)$ (zdůvodněte proč) a určete z grafů obory $D(f)$ a $H(f)$.

b) Načrtněte grafy funkcí
1) $f : y = 2x + 1, \quad x \in \langle -1, 2\rangle$
2) $g : y = -3x + 2, \quad x \in \mathbb{R}$
3) $h : y = (4x^2 - 9)/(2x + 3)$.

. . . .

Absolutní hodnota reálného čísla

$$f(x) = |x| = \max\{x, -x\} = \begin{cases} x & \text{pro} \quad x > 0, \\ 0 & \text{pro} \quad x = 0, \\ -x & \text{pro} \quad x < 0. \end{cases}$$

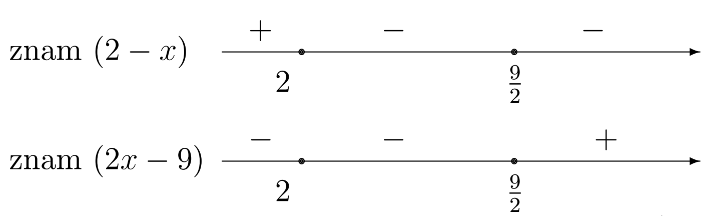
Pro všechna $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ platí

$$\begin{gathered} |x_1| \geq x_1, \\ |x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2|, \\ ||x_1| - |x_2|| \leq |x_1 - x_2| \leq |x_1| + |x_2|, \\ |x_1 \cdot x_2| = |x_1| \cdot |x_2|, \\ |\tfrac{x_1}{x_2}| = \tfrac{|x_1|}{|x_2|}, \text{ pokud } x_2 \neq 0. \end{gathered}$$

. . . .

Příklad 2.2.1: Nakreslete graf funkce $f : y = |2 - x| - |2x - 9|$.

Řešení: Číselnou osu rozdělíme nulovými body (kořeny) výrazů v absolutních hodnotách na intervaly, v nichž tyto výrazy nemění znaménko.



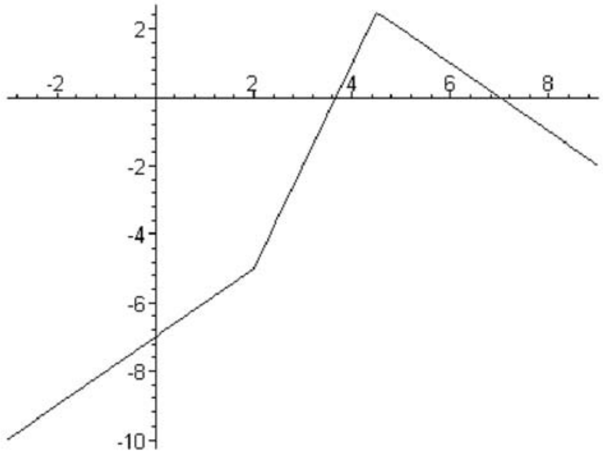
Podle definice absolutní hodnoty v intervalu $(-\infty, 2\rangle$ je $|2 - x| = 2 - x$, $|2x - 9| = -(2x - 9) = 9 - 2x$ a tedy celkem dostáváme:

$$x \in (-\infty, 2\rangle \Longrightarrow f_1 : y = 2 - x + 2x - 9 = x - 7.$$

Analogicky ve zbývajících intervalech platí:

$$x \in (2, 9/2\rangle \Longrightarrow f_2 : y = x - 2 + 2x - 9 = 3x - 11,$$

$$x \in (9/2, \infty) \Longrightarrow f_3 : y = x - 2 - 2x + 9 = -x + 7.$$



Obrázek 2.3:

Cvičení 2.2.2: Nakreslete grafy funkcí

a) $f(x) = |2 + x| + |3x - 1|$,
b) $g(x) = |2x - 1| - |3 + 2x|$,
c) $k(x) = |x^2 - 1|$.

> **Úmluva**. Pokud nebude řečeno jinak, budeme v dalším pod stručným označením funkce vždy rozumět reálnou funkci jedné reálné proměnné. Namísto označení $f : y = f(x)$ budeme také mnohdy užívat zápis pouze funkčního předpisu, např. místo $f : y = x^2$ použijeme zápis $f(x) = x^2$. Pokud nebudeme potřebovat zdůraznit, že jde o funkci f, pak také použijeme zápisy $y = x^2$ nebo $x \mapsto x^2$.

2.3 Složená funkce

V matematické analýze i v technických oborech se budete převážně setkávat s komplikovanějšími funkcemi, které lze získat tzv. skládáním funkcí. Dosadíme-li totiž za nezávisle proměnnou u ve funkčním předpisu $y = f(u)$ pro funkci f vyjádření závisle proměnné u z funkčního předpisu $u = g(x)$ pro funkci g, pak dostaneme funkční předpis pro tzv. ***složenou funkci*** $h = f(g) = f \circ g$, pro kterou platí

$$h : y = f(g(x)).$$

Funkci f nazýváme ***vnější složkou***, funkci g ***vnitřní složkou*** složené funkce h. Je-li například $f : y = \ln u$, $g : u = \sin x$, pak pro složenou funkci $h = f(g)$ platí $h : y = \ln \sin x$. V konkrétních úlohách na skládání funkcí je často nezávisle proměnná označována stále písmenem x a závisle proměnná písmenem y, i když jde o různé funkční předpisy.

Příklad 2.3.1: Určete funkční předpisy pro složené funkce $h = f(g)$, $k = g(f)$, jestliže

$$\text{a) } f(x) = \sqrt{x},\ g(x) = \sin x, \quad \text{b) } f(x) = x^3,\ g(x) = \frac{x-1}{x+1}.$$

Řešení:

$$\text{a) } h : y = \sqrt{\sin x}, k : y = \sin\sqrt{x}, \quad \text{b) } h : y = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3, k : y = \frac{x^3-1}{x^3+1}.$$

Cvičení 2.3.1: Určete funkční předpisy pro $h = f(g), k = g(f)$, je-li

$$\text{a) } f(x) = \sqrt{x-1},\ g(x) = x^3 + 1, \quad \text{b) } f(x) = \frac{x}{2-x},\ g(x) = 2 + e^x.$$

$\surd\surd$ Komentář 2.3.1:

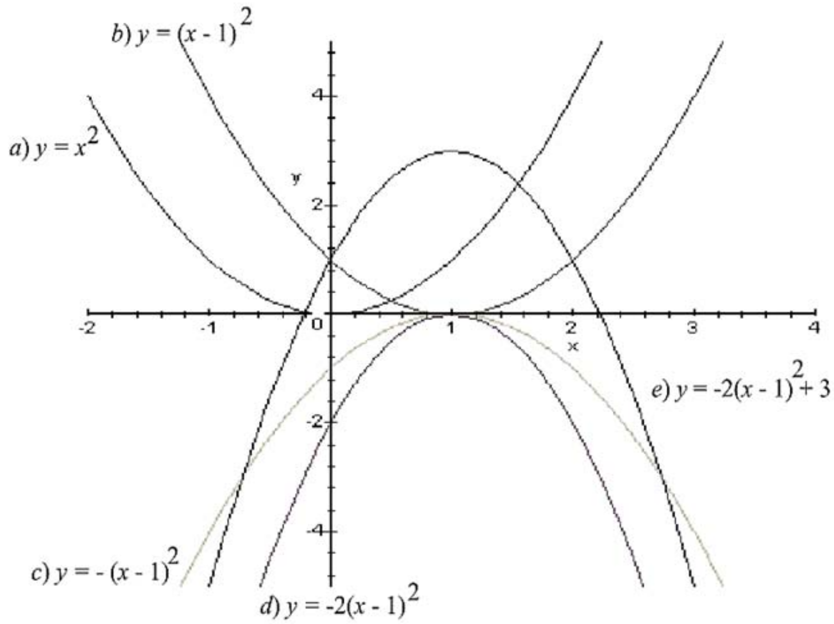
(ι) Chceme-li zjistit přirozený definiční obor složené funkce $h = f(g)$, pak musíme určit taková $x \in \mathbb{R}$, pro která má funkční předpis $y = f(g(x))$ smysl. Jde zřejmě o taková x z $D(g)$, pro něž $g(x) \in D(f)$. Je-li například $h : y = \ln\sin x$, pak z definičního oboru funkce sinus musíme vzít pouze taková x, pro která $\sin x > 0$, neboť pak bude také definována funkční hodnota $\ln\sin x$. Protože sinus je kladný v intervalech tvaru $(2k\pi, (2k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, můžeme psát $D(h) = \cup_{k\in\mathbb{Z}}(2k\pi, (2k+1)\pi)$.

Při výpočtu limit, derivací a integrálů budeme naopak rozkládat zadané složené funkce na složky. Způsob rozkladu bude závislý na konkrétní řešené úloze. Jednu z variant rozkladu si můžeme přiblížit na výpočtu funkčních hodnot na kalkulačce, například pří výpočtu funkční hodnoty $h(9)$ funkce $h : y = \ln\sin x$. Nejprve vypočteme $u_0 = \sin x_0 = \sin 9$ a pak teprve $y_0 = \ln u_0 = \ln\sin x_0 = \ln\sin 9$. Symbolicky

$$\begin{tikzcd} \boxed{x_0} \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "h"'] & \boxed{u_0 = g(x_0)} \arrow[r, "f"] & \boxed{y_0 = f(u_0)} \end{tikzcd}$$

($\iota\iota$) Na příkladech si ukážeme, jak je možné ze známých grafů některých elementárních funkcí získat grafy složitějších funkcí. Uvažujme například kvadratickou funkci $y = -2x^2 + 4x + 1$, $x \in \mathbb{R}$, a zkusme nalézt její graf. Úpravami dostaneme $y = -2(x-1)^2 + 3$ a graf pak můžeme postupně obdržet v krocích $a), b), c), d), e)$ viz obrázek 2.4.

($\iota\iota\iota$) Podobně postupujme v případě funkce $y = (2x+3)/(x+1)$, $x \neq 1$. Můžeme psát $y = 2 + 1/(x+1)$, pomocí posunutí grafu funkce $1/x$ o jednotku doleva ve směru osy x a o 2 jednotky ve směru osy y získáme hledaný graf (viz obrázek 2.5).



Obrázek 2.4:

Příklad 2.3.2: Určete definiční obor funkce $f : y = \sqrt{2x^2 - 5x - 3}$.

Řešení: Máme určit taková reálná čísla, pro která platí $2x^2 - 5x - 3 \geq 0$. Vypočítáme-li kořeny (nulové body) polynomu $2x^2 - 5x - 3$, dostaneme rozklad $2x^2 - 5x - 3 = (2x+1)(x-3)$ a řešením nerovnice $(2x+1)(x-3) \geq 0$ je sjednocení intervalů $(-\infty, -1/2\rangle$ a $\langle 3, \infty)$. Tedy $D(f) = (-\infty, -1/2\rangle \cup \langle 3, \infty)$.

Příklad 2.3.3: Zjistěte, zda se rovnají funkce

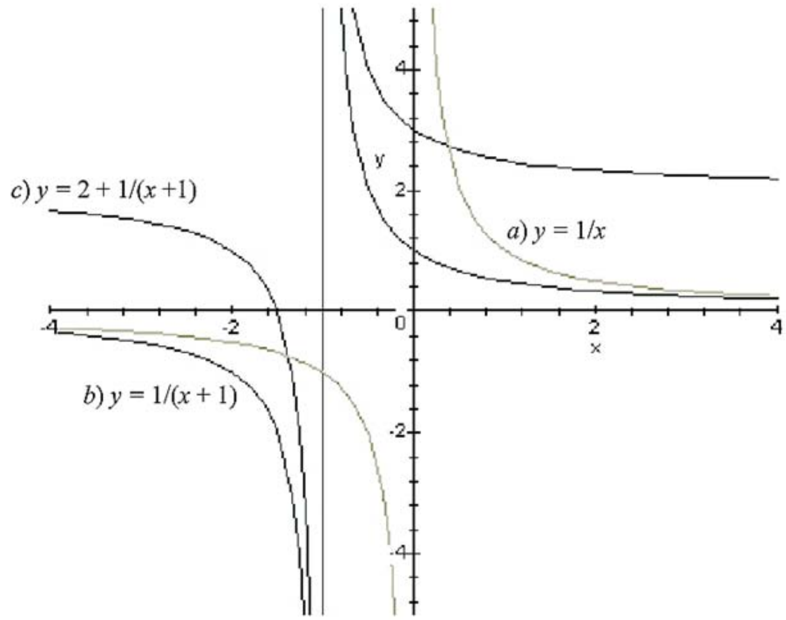
$$f : y = \frac{4x^2 - 9}{2x + 3}, \quad g : y = 2x - 3$$

na svých přirozených definičních oborech.

Řešení: Ačkoliv je možno funkční předpis pro funkci f formálně upravit

$$\frac{4x^2 - 9}{2x + 3} = \frac{(2x + 3)(2x - 3)}{2x + 3} = 2x - 3,$$

je jasné, že poslední rovnost platí pouze pro $x \neq -3/2$. Definiční obory funkcí f, g jsou $D(f) = \mathbb{R} - \{-3/2\}$, $D(g) = \mathbb{R}$ a funkce $f \neq g$.



Obrázek 2.5:

Příklad 2.3.4: Je dána funkce $f : y = 3x^2 - 4x + 1$. Vyjádřete a upravte podíl

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{pro} \quad h \neq 0.$$

Řešení:

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{3(a+h)^2 - 4(a+h) - 1 - 3a^2 + 4a - 1)}{h} =$$

$$= \frac{6ah + 3h^2 - 4h}{h} = 6a + 3h - 4 \quad \text{pro} \quad h \neq 0.$$

Cvičení 2.3.2: Řešte příklady:

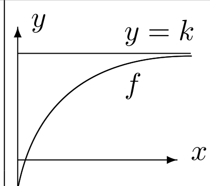
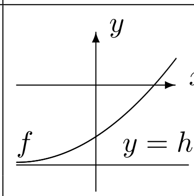
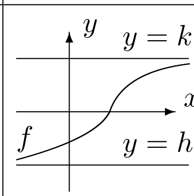
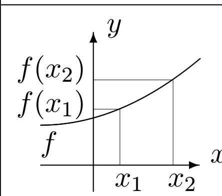
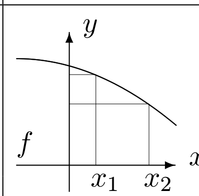
1) Určete definiční obor funkce $f : y = \sqrt{6 - x - 12x^2}$.

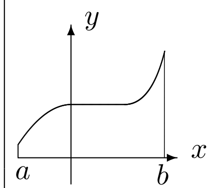
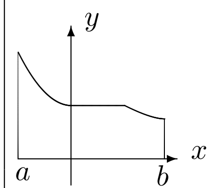
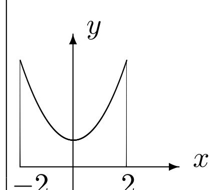
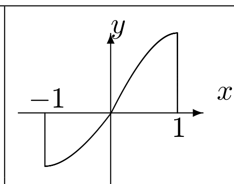
2) Je dána funkce $f : y = 2x^2 + 3x - 4$. Vyjádřete a upravte podíl

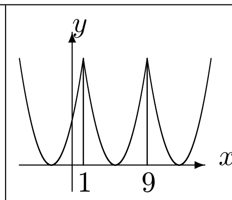
$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{pro} \quad h \neq 0.$$

2.4 Základní vlastnosti funkcí

Označíme $D(f)$ definiční obor funkce f a $M \subset D(f)$, kde M má alespoň dva prvky. Základní vlastnosti funkcí si připomeneme tabulkou:

	vlastnost	**podmínka**	**příklad**
1.	f je shora ohraničená na M	existuje číslo $k \in \mathbb{R}$ takové, že $f(x) \le k$ pro všechna $x \in M$	 $M = \langle 0, \infty)$
2.	f je zdola ohraničená na M	existuje číslo $h \in \mathbb{R}$ takové, že $f(x) \ge h$ pro všechna $x \in M$	 $M = (-\infty, 1)$
3.	f je ohraničená na M	existují čísla $h, k \in \mathbb{R}$ taková, že $h \le f(x) \le k$ pro všechna $x \in M$	 $M = \mathbb{R}$
4.	f je rostoucí na M	pro všechna $x_1, x_2 \in M$ s vlastností $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) < f(x_2)$	 $M = \mathbb{R}$
5.	f je klesající na M	pro všechna $x_1, x_2 \in M$ s vlastností $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) > f(x_2)$	 $M = \mathbb{R}$

	vlastnost	**podmínka**	**příklad**
6.	f je neklesající na M	pro všechna $x_1, x_2 \in M$ s vlastností $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) \leq f(x_2)$	 $M = \langle a, b \rangle$
7.	f je nerostoucí na M	pro všechna $x_1, x_2 \in M$ s vlastností $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) \geq f(x_2)$	 $M = \langle a, b \rangle$
8.	f je ryze (ostře) monotónní na M	f je rostoucí nebo klesající na M	
9.	f je monotónní na M	f je nerostoucí nebo neklesající na M	
10.	f je sudá na M	1. pro každé $x \in M$ také $(-x) \in M$ 2. pro každé $x \in M$ platí $f(-x) = f(x)$	 $M = \langle -2, 2 \rangle$
	a) M musí být symetrická vzhledem k počátku, b) graf funkce f je symetrický vzhledem k ose y.		
11.	f je lichá na M	1. pro každé $x \in M$ také $(-x) \in M$ 2. pro každé $x \in M$ platí $f(-x) = -f(x)$	 $M = \langle -1, 1 \rangle$
	a) M musí být symetrická vzhledem k počátku, b) graf funkce f je symetrický vzhledem k počátku.		

12.	f je periodická na M s periodou p	Existuje číslo $p \in \mathbb{R},\ p > 0,$ takové, že 1. pro každé $x \in M$ také $x \pm p \in M$, 2. pro každé $x \in M$ platí $f(x+p) = f(x)$	 $M = \mathbb{R},\ p = 8$ je základní perioda
	Nejmenší periodu (pokud existuje) nazýváme základní (primitivní, ryzí) periodou funkce f. Graf funkce se opakuje po úsecích, jejichž délka je p (v příkladu je $p = 8$).		

2.4.1 Testovací úlohy

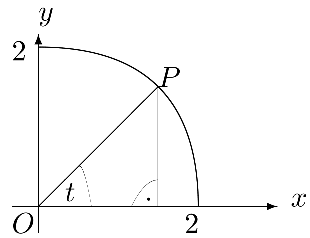
AUTOTEST 2.4.1: Základní vlastnosti funkcí.

	funkční předpis $f(x) = x^2 + x + 1$	a	vlastnosti funkce f b	c
1.	grafem funkce f je	hyperbola	parabola	elipsa
2.	obor hodnot $H(f)$ je	$\langle 1, \infty)$	$\langle -1, \infty)$	$\langle 3/4, \infty)$
3.	f je v $D(f)$	ohraničená	shora ohraničená	zdola ohraničená
4.	f je v $D(f)$	sudá	lichá	ani sudá ani lichá
5.	f je klesající v intervalu	$(-\infty, 0)$	$(-\infty, -1/2\rangle$	$(-1/2, \infty)$
6.	f je prostá v	$D(f)$	$(-\infty, -1)$	$(-\infty, -1/2)$

2.5 Parametrické zadání funkce

V některých aplikacích se ukazuje, že je nevýhodné pracovat s funkcemi zadanými explicitně. Přitom se nám mnohdy podaří vyjádřit kartézské souřadnice $[x, y]$ bodů grafu jako funkce nějaké nové proměnné t, kterou pak obvykle nazýváme *parametrem.*

Mějme funkci f, jejímž grafem je čtvrtkružnice ležící v 1. kvadrantu se středem v počátku a poloměrem $r = 2$. Zvolme si za parametr t úhel, který svírá úsečka určená body O, P s kladným směrem osy x.



Pak pro kartézské souřadnice $[x, y]$ bodů grafu funkce f platí $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$. Pro bod $A = [2, 0]$ dostáváme parametr $t = 0$, pro bod $B = [0, 2]$ je hodnota parametru $t = \pi/2$. Zadáme-li tedy funkce $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$ a interval $\langle 0, \pi/2\rangle$ pro parametr t, pak množina bodů $[x, y] \in \mathbf{E}_2$ takto určená je grafem funkce f a říkáme, že funkce f je zadána parametricky. Je vhodné si uvědomit, že pokud bychom uvažovali tytéž funkce $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$ na oboru parametrů např. $\langle 0, 2\pi\rangle$, pak grafem je celá kružnice, a protože se nejedná o graf funkce, nelze hovořit ani o parametrickém zadání funkce. V tomto případě hovoříme o tzv. parametrickém zadání křivky. Všimněme si také toho, že pro body grafu funkce f (zvolená čtvrtkružnice) platí $x^2 + y^2 = 4$ a funkce f má proto explicitní vyjádření $f : y = \sqrt{4 - x^2}$, $x \in \langle 0, 2\rangle$. Kdybychom nyní dosadili do tohoto předpisu $x = 2\cos t$ z parametrického vyjádření, pak pro y vyjde požadovaný vztah $y = 2\sin t$, a to pro všechna $t \in \langle 0, \pi/2\rangle$.

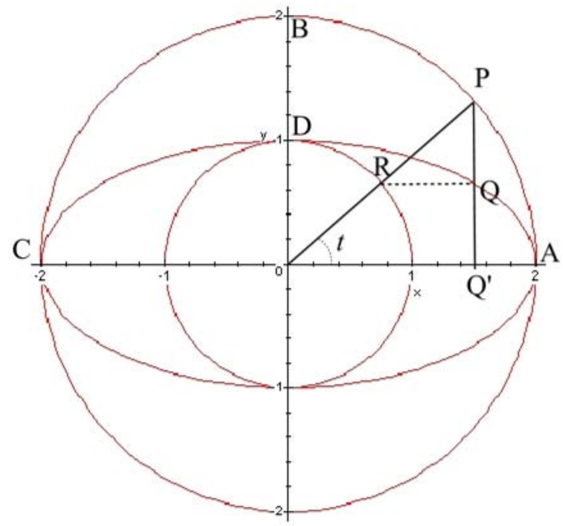
Znalost explicitního vyjádření funkce f nám umožňuje i tzv. přirozenou parametrizaci, kdy za parametr t zvolíme nezávisle proměnnou x a pro závisle proměnnou dostaneme z explicitního vyjádření předpis $y = \sqrt{4 - t^2}$, $t \in \langle 0, 2\rangle$.

Definice 2.5.1: *Obecně pak řekneme, že funkcemi $x = g(t), y = h(t)$, definovanými na oboru parametrů $M \subset \mathbb{R}$, je určená **parametricky funkce** f, jestliže množina všech bodů $[x, y] \in \mathbf{E}_2$ takových, že $x = g(t), y = h(t), t \in M$, je grafem funkce.*

△

Další často se vyskytující křivkou je elipsa, jejíž některé části jsou opět grafy funkcí. Z konstrukce elipsy je známo (viz deskriptivní geometrie), že body elipsy můžeme získat jako průsečíky kolmice vedené bodem P na hlavní osu a kolmice vedené bodem R na vedlejší osu. Ze získaných pravoúhlých trojúhelníků pak již lehce získáme předpisy pro souřadnice $[x, y]$ bodu Q, platí $x = a\cos t, y = b\sin t$. Zvolíme-li za množinu parametrů interval $\langle 0, \pi\rangle$, pak dostaneme parametrické vyjádření funkce f, jejímž grafem je část elipsy nad osou x.

Poznámka: Zkontrolujte si, zda průsečíkům A, D, C horní části elipsy se souřadnicovými osami odpovídají parametry z intervalu $\langle 0, \pi\rangle$.



Obrázek 2.6:

Poznámka: Zjistěte, zda uvedené předpisy vyhovují explicitnímu vyjádření funkce $f : y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$.

Uvedeme si ještě jednu křivku, která se často vyskytuje v aplikacích. Jde o tzv. *prostou cykloidu*, kterou opisuje pevný bod kružnice, která se (bez skluzu) kutálí po přímce (viz obrázek 2.7) Zvolíme-li si za parametr t velikost úhlu, o který se otočí kružnice při přechodu zvoleného bodu z polohy P_0 do polohy P, pak dostáváme pro souřadnice $[x, y]$ bodu P vyjádření

$$x = |OA| = |OB| - |AB| = |OB| - |PC| = at - a\sin t,$$

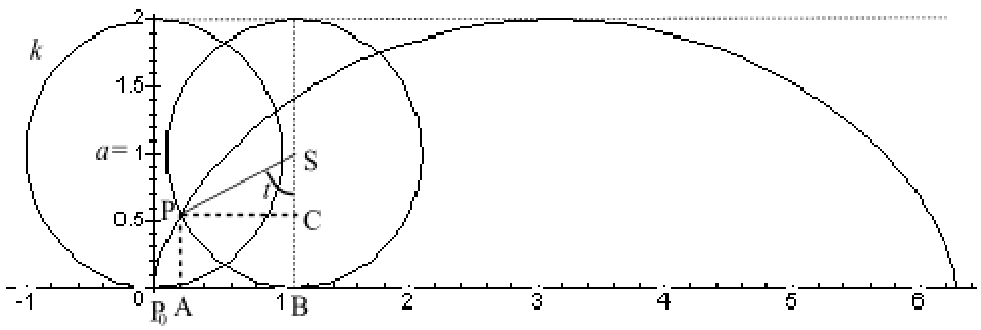
$$y = |AP| = |BS| - |CS| = a - a\cos t.$$

Příklad 2.5.1: Zjistěte, zda rovnicemi

$$x = 2t - 1,\ y = 4t + 3,\ t \in \langle -1, 1\rangle,$$

je určena parametricky funkce.

Řešení: Pro $t \in \langle -1, 1\rangle$ nabývá proměnná x hodnot z intervalu $\langle -3, 1\rangle$ a proměnná y hodnot z $\langle -1, 7\rangle$. Vyjádřením parametru t z 1. rovnice a dosazením do 2. rovnice získáme explicitní vyjádření proměnné y jako funkce proměnné x, tj. $f : y = 2x+5$, $x \in \langle -3, 1\rangle$. Grafem funkce f je úsečka spojující bod $A = [-3, -1]$, který odpovídá parametru $t = -1$ s bodem $B = [1, 7]$, odpovídajícímu parametru $t = 1$.



Obrázek 2.7:

Poznámka: Pokud nebudeme znát graf, vzniká otázka: za jakých předpokladů je dvojicí funkcí $x = g(t), y = h(t), t \in M$ určená parametricky funkce? Takovou podmínku si uvedeme při výkladu inverzní funkce.

Na závěr si ukážeme využití parametrického zadání funkce ve fyzice. Uvažujme vodorovný vrh hmotného bodu. Jde o pohyb složený z přímočarého pohybu ve směru osy x (vodorovného) a z volného pádu. Poloha hmotného bodu, určená souřadnicemi x a y, je v každém čase t taková, jako kdyby hmotný bod konal oba pohyby nezávisle na sobě. Je-li hmotný bod v čase $t = 0$ v počátku souřadnic, platí pro dráhu rovnoměrného přímočarého pohybu s rychlostí c, vztah $x = ct$; pro volný pád platí $y = \frac{1}{2}gt^2$. Dvojice těchto funkcí určuje dráhu (trajektorii) hmotného bodu, přičemž parametrem je čas.

2.6 Inverzní funkce

V matematice, fyzice i v technických předmětech je zcela běžné, že ze známých funkčních závislostí, potřebujeme často vyjadřovat funkční závislosti nové na základě toho, které veličiny v daném případě známe a které neznáme.

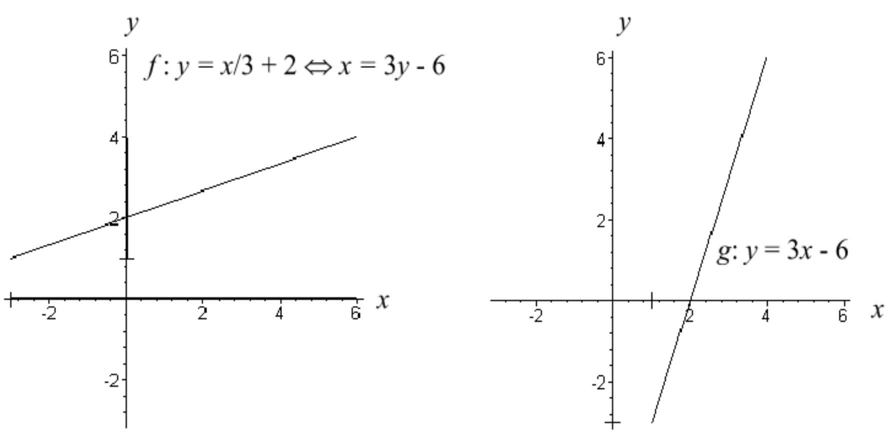
Uvažujeme-li například rovnoměrně zrychlený pohyb s nulovou počáteční rychlostí, pak pro dráhu platí $s = \frac{1}{2}at^2$. Bude-li dráha známá konstantní veličina, pak pro zrychlení dostaneme závislost na čase ve tvaru $a = 2s/t^2$. Pokud budeme naopak zjišťovat čas, pak závislost na zrychlení při známé dráze bude tvaru $t = \sqrt{2s/a^2}$.

Příklad 2.6.1: Zabývejme se nyní podrobněji těmito otázkami z matematického hlediska. Mějme například funkci $f: y = x/3 + 2$, $x \in \langle -3, 6\rangle$. Je jasné, že funkce f zobrazuje interval $\langle -3, 6\rangle$ na interval $\langle 1, 4\rangle$ a grafem funkce f je úsečka. Vyjádříme-li z funkčního předpisu proměnnou x, pak získáme předpis $x = 3y - 6$, který určuje novou funkci g, která každému y z intervalu $\langle 1, 4\rangle$ přiřadí právě takové x z intervalu $\langle -3, 6\rangle$, pro které platí $y = x/3 + 2$. Funkci g nazýváme *inverzní k funkci* f a píšeme $g = f^{-1}$. Přitom dostáváme

$$g(f(x)) = 3\left(\frac{x}{3} + 2\right) - 6 = x \text{ pro } x \in \langle -3, 6\rangle,$$

$$f(g(y)) = \frac{3y - 6}{3} + 2 = y \text{ pro } y \in \langle -1, 4\rangle,$$

graficky:



Obrázek 2.8:

eventuálně:

$$x \xmapsto{f} y \xmapsto{f^{-1}} x; \quad y \xmapsto{f^{-1}} x \xmapsto{f} y,$$

$$f: \langle -3, 6\rangle \longrightarrow \langle 1, 4\rangle, \quad f^{-1}: \langle 1, 4\rangle \longrightarrow \langle -3, 6\rangle.$$

Chceme-li zakreslit grafy funkcí f a f^{-1} do téže kartézské soustavy souřadnic $\langle O; x, y\rangle$, pak je zapotřebí ve funkčních předpisech nezávisle proměnnou označit písmenem x a závisle proměnnou písmenem y. Proto v zápisu $f^{-1}: x = 3y - 6$ provedeme záměnu proměnných x a y a budeme psát $f^{-1}: y = 3x - 6$. Z vlastností

$$[a, b] \in \mathrm{Gr}\ f \iff [b, a] \in \mathrm{Gr}\ f^{-1}$$

plyne, že **grafy funkcí f a f^{-1} jsou symetrické vzhledem k přímce** $y = x$ (to znamená, že body $A = [a, b]$, $B = [b, a]$ leží na přímce kolmé k přímce $y = x$

a mají od této přímky stejnou vzdálenost). Pro námi zvolenou funkci $f(x) = \frac{x}{3} + 2$ například dostaneme

x	-3	0	3	6
$f(x)$	1	2	3	4

x	1	2	3	4
$f^{-1}(x)$	-3	0	3	6

Nyní se budeme zabývat podmínkou, za které existuje funkce f^{-1} inverzní k funkci f. *Protože f^{-1} je opět funkce, odpovídá každému $y \in H(f)$ právě jedno takové $x \in D(f)$, že platí $f(x) = y$. Říkáme pak, že funkce f je **prostá**.* Známe-li graf funkce f, pak tuto vlastnost jednoduše ověříme tím, že nejenom každá přímka rovnoběžná s osou y protne graf nejvýše v jednom bodě, ale také libovolná přímka rovnoběžná s osou x protne graf nejvýše v jednom bodě. Naše úvahy lze shrnout do následující definice:

Definice 2.6.1: *Je-li f prostá funkce v $D(f)$, pak k ní existuje **inverzní funkce** f^{-1} definovaná na $H(f)$, přičemž platí*

$$[x, y] \in \text{Gr } f \iff [y, x] \in \text{Gr } f^{-1}.$$

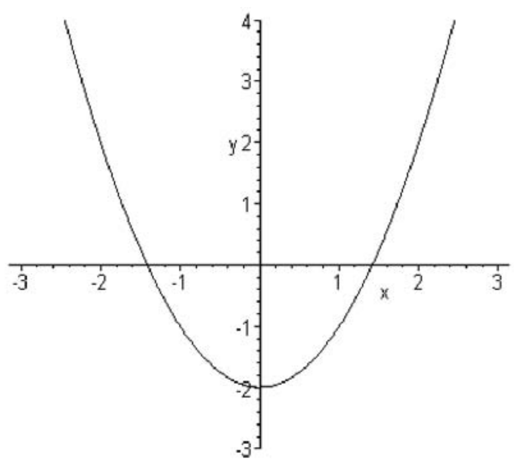
△

Pokud tedy k funkci f existuje v $D(f)$ inverzní funkce f^{-1}, pak platí:

a) $D(f^{-1}) = H(f), \qquad H(f^{-1}) = D(f)$

b) $y = f(f^{-1}(y))$ pro každé $y \in H(f)$,

$x = f^{-1}(f(x))$ pro každé $x \in D(f)$.



Obrázek 2.9:

Poznámka: Je-li funkce g definována na množině $M \subset D(f)$ a přitom platí $g(x) = f(x)$ pro každé $x \in M$, pak říkáme, že funkce g je **restrikcí** (zúžením) funkce f na množinu M. Píšeme $g = f|_M$.

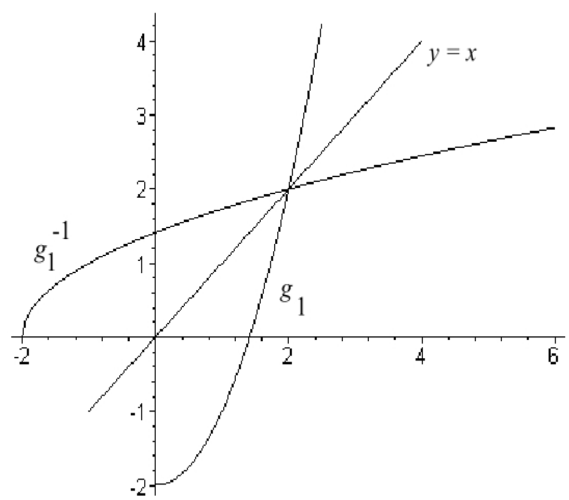
Příklad 2.6.2: Určete inverzní funkci k funkci $g = f|_M$, kde M je „největší" podmnožina definičního oboru funkce $f : y = x^2 - 2$, v níž je f prostá.

Řešení: Z Obr. 2.9 vidíme, že existují rovnoběžky s osou x, které protínají graf ve dvou bodech. Funkce f tedy není v $D(f) = \mathbb{R}$ prostá. Můžeme se o tom přesvědčit také „algebraicky". Z rovnice $y = x^2-2$ dostáváme $|x| = \sqrt{y+2}$. Zvolíme-li například $y_1 = 7$, pak rovnici $|x| = \sqrt{9}$ vyhovují čísla $x_1 = 3$, $x_2 = -3$. Zúžíme-li však funkci f například na interval $\langle 0, \infty)$, dostaneme funkci $g_1 = f|_{\langle 0,\infty)}$, která je již prostá a můžeme tedy k ní určit funkci inverzní. Protože $x \in \langle 0, \infty)$, je $|x| = x$ a tedy $x = \sqrt{y+2}$. Odtud $g_1^{-1} : y = \sqrt{x+2}$. Přitom

$$g_1 : \langle 0, \infty) \longrightarrow \langle -2, \infty),$$

$$g_1^{-1} : \langle -2, \infty) \longrightarrow \langle 0, \infty).$$

Tomu odpovídají následující grafy na Obr. 2.10.



Obrázek 2.10:

Cvičení 2.6.1:

a) Pro funkci $f : y = x^2 - 2$ určete g_2^{-1}, kde $g_2 = f|_{(-\infty,0\rangle}$ a načrtněte grafy funkcí g_2 a g_2^{-1}.

b) Určete inverzní funkce (existují-li) k funkcím
1) $f(x) = 2 - \sqrt{x}$,
2) $h(x) = 2x^3 - 1$
(na jejich přirozených definičních oborech).

2.7 Polynomy a racionální funkce

2.7.1 Polynomy

Pro rozklady racionálních funkcí na parciální zlomky a určování znaménka funkčních hodnot budeme potřebovat umět rozkládat polynomy na součiny polynomů „co možná nejnižších možných stupňů“. Přitom půjde o tzv. ***reálné polynomy***, kterými budeme rozumět reálné funkce definované v $\mathbb{R}$, mající funkční předpisy tvaru

$$f(x) = P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k,$$

$a_k \in \mathbb{R}$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Čísla a_k nazýváme *koeficienty* polynomu, číslo a_0 se často nazývá ***absolutním členem***, nejvyšší mocninu $n = \mathrm{st}f$ nazýváme ***stupněm polynomu*** a přitom předpokládáme, že koeficient $a_n \neq 0$.

V dalším textu budeme pracovat pouze s reálnými polynomy a přitom budeme zkráceně hovořit jen o polynomu. Připomeňme si některé základní operace s polynomy, s nimiž jste se seznámili již na střední škole.

Mějme polynomy $f : y = P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, g : y = Q_m(x) = \sum_{l=0}^{n} b_l x^l$. Pak definujeme

$$f(x) + g(x) = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k)x^k \text{ pro } n \geq m$$

(sčítáme koeficienty u odpovídajících si mocnin),

$$rf(x) = \sum_{k=0}^{n} r a_k x^k \text{ pro } r \in \mathbb{R},$$

$$f(x) \cdot g(x) = \sum_{k=0}^{n+m} c_k x^k, \text{ kde } c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$$

(násobíme postupně každý sčítanec prvního polynomu všemi sčítanci druhého polynomu). Zřejmě platí

$$\mathrm{st}(f + g) \leq \max(\mathrm{st}f, \mathrm{st}g),$$

$$\mathrm{st}(f \cdot g) = \mathrm{st}f + \mathrm{st}g.$$

Ukážeme si tyto jednoduché operace na příkladě. Mějme polynomy

$$f(x) = 4x^3 + 8x^2 - x - 2, g(x) = 2x + 1.$$

Pak

$$f(x) + g(x) = 4x^3 + 8x^2 + x - 1,$$

$$f(x) \cdot g(x) = (4x^3 + 8x^2 - x - 2) \cdot (2x + 1) =$$
$$= 8x^4 + 4x^3 + 16x^3 + 8x^2 - 2x^2 - x - 4x - 2 = 8x^4 + 20x^3 + 6x^2 - 5x - 2.$$

Důležitými operacemi s polynomy jsou:

Dělení polynomů: Platí následující tvrzení:

Tvrzení: *Jsou-li P_n, Q_m polynomy stupňů $n \geq m > 0$, pak existují právě dva polynomy H_{n-m}, R_j (stupňů $n - m, 0 \leq j < m$), pro které platí*

$$P_n = Q_m \cdot H_{n-m} + R_j, \textit{ tj.}$$

$$\frac{P_n}{Q_m} = H_{n-m} + \frac{R_j}{Q_m}, \quad \textit{pokud } Q_m(x) \neq 0.$$

Proto používáme pro polynomy názvy: Q_m –dělitel, H_{n-m} –podílový polynom, R_j –zbytek. Je-li polynom R_j nulový, pak říkáme, že polynom P_n je ***dělitelný*** polynomem Q_m.

Příklad 2.7.1: Jsou dány polynomy $P_3(x) = 4x^3 + 8x^2 + x - 1$, $Q_2(x) = 2x^2 + 1$. Vypočtěte

$$\frac{P_3(x)}{Q_2(x)}.$$

Řešení:

$$\begin{array}{l}
(\underline{4x^3} + 8x^2 + x - 1) \;:\; (\underline{2x^2} + 1) \;= 2x + 4 \\
\underline{-4x^3 \qquad\quad - 2x} \\
\qquad \underline{8x^2} - x - 1 \\
\qquad \underline{-8x^2 \qquad - 4} \\
\qquad\qquad -x - 5
\end{array}$$

Odtud

$$\frac{4x^3 + 8x^2 + x - 1}{2x^2 + 1} = 2x + 4 - \frac{x + 5}{2x^2 + 1}.$$

O správnosti výsledku se lehce přesvědčíme převedením pravé strany rovnice na společného jmenovatele.

Rovnost polynomů: Je-li

$$P_n(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0,$$

$$Q_m(x) = b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0,$$

pak $P_n = Q_m$, jestliže $n = m$ a $b_i = a_i$ pro $i = 0, 1, \ldots, n$ (tj. koeficienty u stejných mocnin jsou si rovny).

Kořenové vlastnosti reálných polynomů: Ze střední školy již znáte vzorec

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

pro výpočet kořenů kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$, kde $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$. Víte, že může nastat několik variant řešení:

1) Je-li diskriminant $D > 0$, pak má rovnice dva různé reálné kořeny x_1, x_2 (tzv. jednonásobné) a platí $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

2) Je-li $D = 0$, pak má rovnice dva stejné reálné kořeny $x_1 = x_2$ (tzv. dvojnásobný kořen x_1) a platí $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) = a(x - x_1)^2$.

3) Je-li $D < 0$ a připustíme-li, že kořeny mohou být komplexní čísla, pak má rovnice dvojici (jednonásobných) komplexně sdružených kořenů

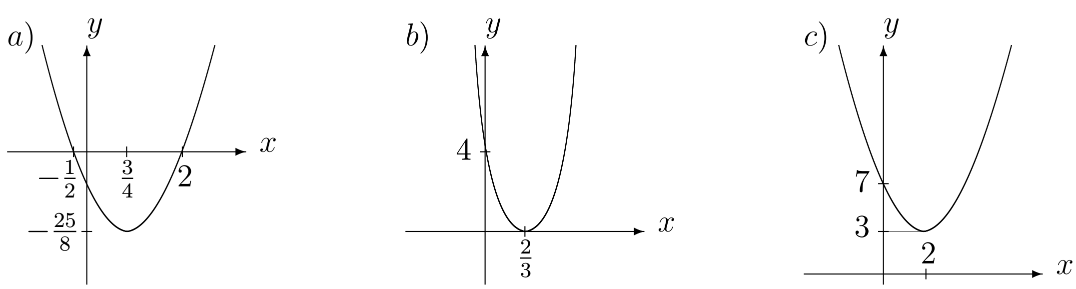
$$x_1 = \frac{-b + i\sqrt{4ac - b^2}}{2a} = \frac{-b + i\sqrt{-D}}{2a}, \; x_2 = \frac{-b - i\sqrt{-D}}{2a}$$

a opět platí $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

O správnosti uvedených rozkladů se můžete přesvědčit roznásobením pravých stran rozkladů a jejich úpravou na tvar $ax^2 + bx + c$. Ve třetím případě však výrazy $x - x_1, x - x_2$ nejsou reálné polynomy, ale jejich součin je již reálný polynom. Proto tyto

polynomy 2. stupně se záporným diskriminantem již nebudeme dále rozkládat.

Výše uvedené varianty si ukážeme na přibližných grafech reálných polynomů.



kde

$a)$ $y = 2x^2 - 3x - 2 = 2(x + \frac{1}{2})(x - 2)$,
$b)$ $y = 9x^2 - 12x + 4 = 9(x - \frac{2}{3})^2$,
$c)$ $y = x^2 - 4x + 7 = (x - 2)^2 + 3 = (x - (2 + i\sqrt{3}))(x - (2 - i\sqrt{3}))$.

Vidíte, že v reálných kořenech graf funkce $f : y = ax^2 + bx + c$ protíná nebo se dotýká osy x a funkční hodnoty v kořenech jsou tedy nulové. Rovněž funkční hodnoty v komplexních kořenech jsou nulové, jak se můžete přesvědčit dosazením do funkčního předpisu, graf funkce v tomto případě neprotíná ani se nedotýká osy x. Uvedené rozklady nazýváme rozklady na součin kořenových činitelů. Přejdeme k přesnějšímu vyjádření použitých pojmů.

Definice 2.7.1:

- *Je-li P_n polynom stupně $n, n > 0$, pak číslo $x_0 \in \mathbb{R}$ (případně $x_0 \in \mathbf{C}$) nazveme **kořenem** (nebo též nulovým bodem), je-li splněno $P_n(x_0) = 0$. Výraz $x - x_0$ nazýváme **kořenovým činitelem**.*
- *Číslo x_0 nazveme $k-$**násobným kořenem** polynomu P_n stupně $n > 0$, jestliže platí $P_n(x) = (x - x_0)^k \cdot Q_{n-k}(x)$, přičemž $Q_{n-k}(x_0) \neq 0$.*

△

Uvedeme si ještě přehled kořenových vlastností *reálných polynomů* $P_n(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ stupňů $n \geq 1$:

- V oboru C má každý polynom n–tého stupně právě n kořenů (přičemž každý kořen je počítán tolikrát, jaká je jeho násobnost) a platí $P_n(x) = a_n(x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)$. Jde o tzv. *rozklad polynomu na součin kořenových činitelů.*
- S každým k–násobným kořenem $a+ib$ má polynom také k–násobný kořen $a - ib$.
- Polynom lichého stupně má alespoň jeden reálný kořen.
- Má-li polynom P_n *celočíselné* koeficienty $a_i \in \mathbb{Z}, i = 0, \ldots, n$, a je-li *celé číslo* p kořenem polynomu P_n, pak p dělí koeficient a_0.
- $P_n(x) = a_n(x-x_0)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (x-x_r)^{k_r} \cdot ((x-a_1)^2+b_1^2)^{l_1} \cdot \ldots \cdot ((x-a_s)^2+b_s^2)^{l_s}$, kde polynom P_n má reálné kořeny $x_0, \ldots, x_r$ násobností $k_1, \ldots, k_r$, komplexní kořeny $a_1 + b_1 i, \ldots, a_s + b_s i$ násobností $l_1, \ldots, l_s$, přičemž $k_1 + \ldots + k_r + $ $+ 2l_1 + \ldots + 2l_s = n$. Jde o tzv. rozklad v *reálném oboru.*

$\surd\surd$ Komentář 2.7.1:

1. Je vhodné si uvědomit, že pro nalezení rozkladu polynomu v reálném oboru stačí, abychom zadaný polynom rozložili na součin polynomů tvaru
   $(ex + d)^k$, $e \neq 0, k \in \mathbb{N}$; $(ax^2 + bx + c)^l$, $a \neq 0, l \in \mathbb{N}, D = b^2 - 4ac < 0$.
   Za rozklad v reálném oboru tedy můžeme například považovat součin
   $$(2x + 1)^3(3x - 4)^2(2x^2 + x + 1)(3x^2 + 5)^2.$$
2. Pro hledání celočíselných kořenů můžeme také využít tzv. *Hornerova schématu*. Dělíme-li polynom P_n polynomem $x - c$, pak platí $P_n(x) = (x - c)H_{n-1}(x) + d$, přičemž pro koeficienty polynomu $H_{n-1}(x) = b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ platí schéma

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\dots$	a_1	a_0
$x = c$	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	$\dots$	b_0	$d = P_n(c)$

kde

$$\begin{aligned} b_{n-1} &= a_n, \\ b_{n-2} &= cb_{n-1} + a_{n-1}, \\ b_{n-3} &= cb_{n-2} + a_{n-2}, \\ &\vdots \\ b_0 &= cb_1 + a_1, \\ d &= cb_0 + a_0. \end{aligned}$$

Je vidět, že se s touto tabulkou pohodlně pracuje a lehce se určí koeficienty polynomu H_{n-1}.

O platnosti těchto vztahů bychom se mohli přesvědčit například tak, že v rovnosti $P_n(x) = (x - c)H_{n-1} + d$, porovnáme koeficienty u odpovídajících mocnin.

Příklad 2.7.2: Určete rozklad polynomu (v reálném oboru)

$$P_5(x) = 2x^5 + x^4 - 5x^3 + x^2 - x + 2.$$

Řešení: Má-li polynom celočíselné kořeny, pak tyto kořeny dělí koeficient $a_0 = 2$. Mohou to být tedy čísla $1, -1, 2, -2$. Použijeme Hornerovo schéma

	2	1	-5	1	-1	2	
$x = 1$	2	3	-2	-1	-2	0	$x = 1$ je kořen, $P_5(x)=(x-1)(2x^4+3x^3-2x^2-x-2)=(x-1)H_4(x)$
$x = 1$	2	5	3	2	0		$x = 1$ je opět kořen, $H_4(x)=(x-1)(2x^3+5x^2+3x+2)=(x-1)H_3(x)$
$x = -1$	2	3	0	2	-2		$x = -1$ není kořen
$x = -2$	2	1	1	0			$x = -2$ je kořen $H_3(x)=2x^3+5x^2+3x+2=(x+2)(2x^2+x+1)$

Výsledek je $P_5(x) = (x - 1)^2(x + 2)(2x^2 + x + 1)$.

Příklad 2.7.3: Určete rozklad polynomu $P_4(x) = 4x^4 + 3x^2 + 1$.

Řešení: Je jasné, že polynom nemá reálné kořeny. Zkusíme ho rozložit na součin polynomů 2. stupně užitím úprav (bez výpočtu komplexních kořenů). Jistě platí $P_4(x) = (2x^2 + 1)^2 - x^2 = (2x^2 + x + 1)(2x^2 - x + 1)$.

Znaménko polynomu

Při vyšetřování průběhu funkcí budeme potřebovat často určit *znaménko polynomu*. Je vidět, že na změnu znaménka polynomu mají vliv pouze *reálné kořeny liché násobnosti.*

Příklad 2.7.4: Určete znaménko polynomu

$$P_5(x) = (x-1)^2(x+2)(2x^2+x+1).$$

Řešení: Reálné kořeny polynomu jsou $x_1 = 1$ (dvojnásobný, znaménko se nemění), $x_2 = -2$ (jednonásobný, znaménko se mění). Například $P_5(0) = 2 > 0$ určí znaménko polynomu v intervalu obsahujícím bod 0.

znam $P_5(x)$ $\quad - \quad -2 \quad + \quad 1 \quad +$

Cvičení 2.7.1: Určete rozklad v reálném oboru a znaménko polynomu:
a) $f(x) = 3x^3 - 8x^2 + 7x - 2$, b) $g(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 4$,
c) $h(x) = 8x^4 + 2x^2 - 1$, d) $k(x) = 6x^4 + 7x^2 + 2$.

2.7.2 Racionální funkce, rozklad na parciální zlomky.

Definice 2.7.2: *Racionální funkcí nazýváme podíl dvou nenulových polynomů P_m/Q_n stupňů m, n.* Pokud $m < n$, jde o tzv. *ryzí funkci*, jestliže $m \geq n$, jde o tzv. neryzí racionální funkci.

△

Platí:

1. Každá neryzí racionální funkce je buď polynom nebo se dá vyjádřit jako součet polynomu a ryzí racionální funkce.

2. Každou ryzí racionální funkci P_m/Q_n lze rozložit na součet parciálních zlomků.
   Jestliže se v rozkladu polynomu Q_n vyskytuje polynom $(ex+d)^k$, kde $e \neq 0$, pak mu v rozkladu racionální funkce P_m/Q_n odpovídá součet k parciálních zlomků tvaru

$$\frac{C_1}{ex+d} + \frac{C_2}{(ex+d)^2} + \cdots + \frac{C_k}{(ex+d)^k}\,.$$

   Pokud v rozkladu polynomu Q_n je polynom tvaru $(ax^2+bx+c)^l$, kde $a \neq 0$, diskriminant $D < 0$, pak mu v rozkladu odpovídá součet l parciálních zlomků:

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{A_lx+B_l}{(ax^2+bx+c)^l}\,.$$

Příklad 2.7.5: Rozložte racionální funkci

$$f(x) = \frac{2x^4 - 4x^2 + 5x + 1}{2x^4 - 3x^3 + x^2 - x + 1} = \frac{P_4(x)}{Q_4(x)}$$

na součet polynomu a parciálních zlomků.

Řešení: Zadaná racionální funkce není ryzí a proto nejprve polynomy podělíme. Dostaneme

$$f(x) = 1 + \frac{3x^3 - 5x^2 + 6x}{2x^4 - 3x^3 + x^2 - x + 1}.$$

Nyní nalezneme rozklad polynomu Q_4, který je ve jmenovateli. Nejprve pomocí Hornerova schématu otestujeme, zda některé z čísel $1, -1$ (dělitelé absolutního členu) je kořenem polynomu Q_4.

	2	-3	1	-1	1	
$x = -1$	2	-5	6	-7	8	$x = -1$ není kořen
$x = 1$	2	-1	0	-1	0	$x = 1$ je kořen
$x = 1$	2	1	1	0		

Celkem tedy platí $Q_4(x) = (x-1)^2(2x^2 + x + 1)$. Tomuto rozkladu odpovídá součet parciálních zlomků

$$\frac{3x^3 - 5x^2 + 6x}{2x^4 - 3x^3 + x^2 - x + 1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx + D}{2x^2 + x + 1}.$$

Převedeme-li pravou stranu rovnice na společného jmenovatele, dostaneme následující rovnost čitatelů

$$3x^3 - 5x^2 + 6x = A(x-1)(2x^2 + x + 1) + B(2x^2 + x + 1) + (Cx + D)(x-1)^2.$$

Jde o rovnost polynomů, využijme tedy toho, že koeficienty u stejných mocnin se musí rovnat a současně porovnáme funkční hodnoty v reálném kořenu 1 polynomu Q_4. Dostaneme

$$\begin{array}{rrcl}
x = 1: & 4 & = & 4B \qquad\qquad \Longrightarrow \quad B = 1 \\
x^3: & 3 & = & 2A + C \\
x^0: & 0 & = & -A + B + D \\
x^2: & -5 & = & -A + 2B - 2C + D.
\end{array}$$

Odtud

$$\begin{aligned}
2A + C &= 3 \\
-A + D &= -1 \\
-A - 2C + D &= -7.
\end{aligned}$$

Řešením tohoto systému je $A = 0$, $C = 3$, $D = -1$. Platí tedy rozklad

$$f(x) = 1 + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{3x-1}{2x^2+x+1}.$$

O správnosti rozkladu se můžeme přesvědčit sečtením pravé strany.

Poznámka. Uvedený rozklad racionální funkce nám později umožní její jednoduché zintegrování.

Znaménko racionální funkce

Znaménko racionální funkce $f(x) = P_m(x)/Q_n x$, kde polynomy P_m, Q_n nemají společné kořeny, určíme analogicky jako znaménko polynomu. Stačí si uvědomit, že na změnu znaménka funkce f budou mít opět vliv pouze *reálné kořeny liché násobnosti čitatele a jmenovatele*. Kořeny jmenovatele ovšem nejsou v definičním oboru funkce f.

Příklad 2.7.6: Určete znaménko racionální funkce

$$f(x) = \frac{(2x-1)^3(3x+4)^2(2x^2+1)}{(x-2)(x^2+x+1)}.$$

Řešení: Reálné kořeny polynomu jsou $x_1 = 1/2$ (trojnásobný, znaménko se mění), $x_2 = -4/3$ (dvojnásobný, znaménko se nemění), $x_3 = 2$ (jednonásobný, znaménko se mění). Například $f(0) = 8 > 0$ určí znaménko polynomu v intervalu obsahujícím bod 0.

znam $f(x)$	$+$	$-\frac{4}{3}$	$+$	$\frac{1}{2}$	$-$	2	$+$

Cvičení 2.7.2: Určete rozklady racionálních funkcí na parciální zlomky nebo na součet polynomu a parciálních zlomků:

$$\text{a)}\ \frac{4-x^3}{4x^3+7x^2-2x}, \qquad \text{b)}\ \frac{x+2}{x^3-2x^2},$$

$$\text{c)}\ \frac{x^3+3x-2}{x^4+3x^2+4} \qquad \text{d)}\ \frac{x^5+3x^4+4x^3+8x^2+6x+4}{x^4+2x^3+x^2+4x+4}.$$

O správnosti výsledků se přesvědčte zkouškou (převedením výsledku na společného jmenovatele).

2.7.3 Testovací úlohy

AUTOTEST 2.7.1: Polynom, racionální funkce, parciální zlomky.

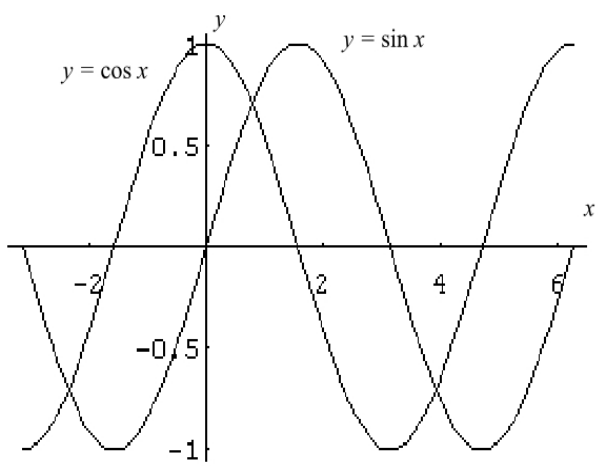
	funkce	a	b	c
1.	číslo -1 je kořen polynomu $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$	jednonásobný	dvojnásobný	není kořen
2.	číslo 1 je kořen polynomu $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$	jednonásobný	dvojnásobný	trojnásobný
3.	$\dfrac{x}{x^2 - 2x + 1}$	je parciální zlomek	není parciální zlomek	je ryzí rac. funkce
4.	$\dfrac{x^3}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}$	je parciální zlomek	je ryzí rac. funkce	je neryzí rac. funkce
5.	$\dfrac{x}{x^4 + 2x^2 + 1}$	je parciální zlomek	není parciální zlomek	jmenovatel nemá reálný kořen
6.	$\dfrac{1}{3x^4 + 5x^2 + 2}$	je parciální zlomek	není parciální zlomek	jmenovatel nemá reálný kořen
7.	$\dfrac{1}{6x^2 + x - 2}$	je parciální zlomek	rozkládá se na $\frac{A}{2x+1} + \frac{B}{3x-2}$	rozkládá se na $\frac{A}{2x-1} + \frac{B}{3x+2}$
8.	$\dfrac{x}{x^3 + x^2 - x - 1}$ se rozkládá na součet parciálních zlomků	$\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}$	$\frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x-1}$	$\frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x+1)^2}$
9.	$\dfrac{1}{(3x-1)^2 \cdot (2x^2+1)}$ se rozkládá na součet parciálních zlomků	$\frac{A}{3x-1} + \frac{Bx+C}{(3x-1)^2} +$ $+ \frac{Dx+E}{2x^2+1}$	$\frac{A}{(3x-1)^2} + \frac{Bx+C}{2x^2+1}$	$\frac{A}{3x-1} + \frac{B}{(3x-1)^2} +$ $+ \frac{Cx+D}{2x^2+1}$
10.	$\dfrac{1}{2x^4 + 5x^2 + 2}$ se rozkládá na součet parciálních zlomků	je parciální zlomek	$\frac{Ax+B}{2x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+2}$	$\frac{A}{2x^2+1} + \frac{B}{x^2+2}$

2.8 Elementární funkce

2.8.1 Goniometrické funkce

Mezi základními funkcemi známými ze střední školy jsou *goniometrické funkce*. Připomeneme si některé základní vlastnosti těchto funkcí a užitečné vzorce.

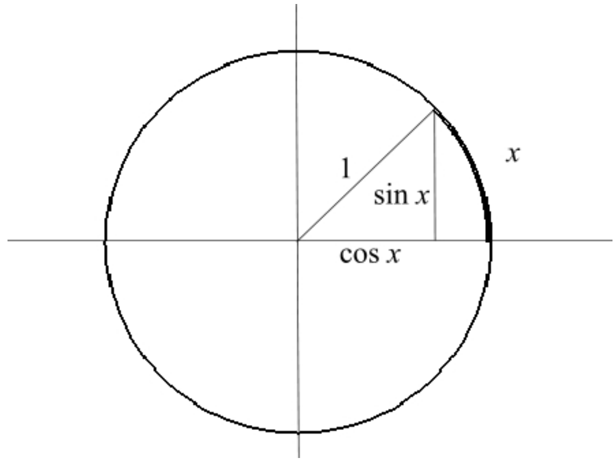
sinus, $f: y = \sin x$	**kosinus**, $f: y = \cos x$
$D(f) = \mathbb{R},\ H(f) = \langle -1, 1 \rangle$, funkce je lichá na $D(f)$, periodická na $\mathbf{R}$ s periodou 2π, rostoucí na každém intervalu $\langle -\pi/2 + 2k\pi, \pi/2 + 2k\pi \rangle, k \in \mathbb{Z}$, klesající na každém intervalu $\langle \pi/2 + 2k\pi, 3\pi/2 + 2k\pi \rangle, k \in \mathbb{Z}$.	$D(f) = \mathbb{R},\ H(f) = \langle -1, 1 \rangle$, funkce je sudá na $D(f)$, periodická na $\mathbf{R}$ s periodou 2π, rostoucí na každém intervalu $\langle (2k+1)\pi + 2k\pi, (2k+2)\pi + 2k\pi \rangle$, $k \in \mathbb{Z}$, klesající na každém intervalu $\langle 2k\pi + 2k\pi, (2k+1)\pi + 2k\pi \rangle, k \in \mathbb{Z}$.



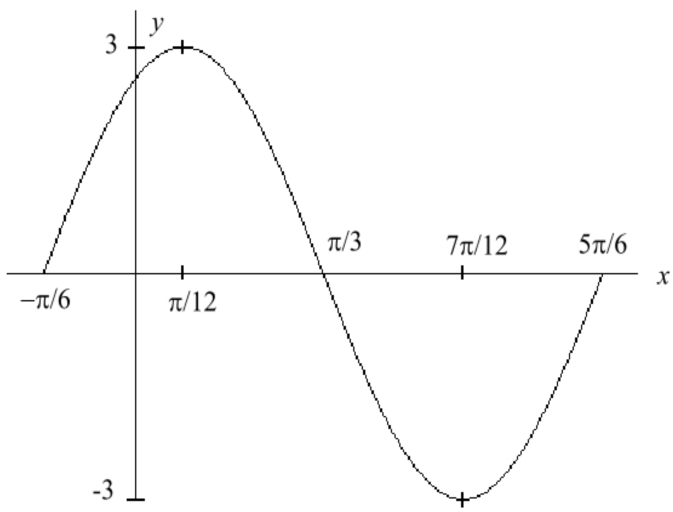
Obrázek 2.11: Funkce $\sin x, \cos x$

Například pro integrování budeme používat následující vzorce:

$$\begin{aligned}
\sin(x_1 \pm x_2) &= \sin x_1 \cos x_2 \pm \cos x_1 \sin x_2 \\
\cos(x_1 \pm x_2) &= \cos x_1 \cos x_2 \mp \sin x_1 \sin x_2 \\
\sin 2x &= 2 \sin x \cos x, \\
\cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x, \\
1 &= \cos^2 x + \sin^2 x, \\
\sin^2 x &= \frac{1 - \cos 2x}{2}, \\
\cos^2 x &= \frac{1 + \cos 2x}{2}.
\end{aligned}$$



Obrázek 2.12:



Obrázek 2.13:

Spolu s periodicitou funkcí sin, cos jsou často využívány funkční hodnoty v argumentech $0, \pi/6, \pi/4, \pi/3, \pi/2$, viz následující tabulka a využití jednotkové kružnice (2.12)

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin x$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0

Příklad 2.8.1: Nakreslete graf funkce $f : y = 3\sin(2x + \pi/3)$.

Řešení:

$\surd$ 1. řešení. Zjistíme si interval, který vnitřní složka $g(x) = 2x + \pi/3$ zobrazí na základní interval periodicity funkce sinus, tj. $\langle 0, 2\pi\rangle$, a takové hodnoty nezávisle proměnné x, pro které funkce g nabývá „dalších význačných hodnot“ $\pi/2, \pi, 3\pi/2$. Dostaneme následující tabulku:

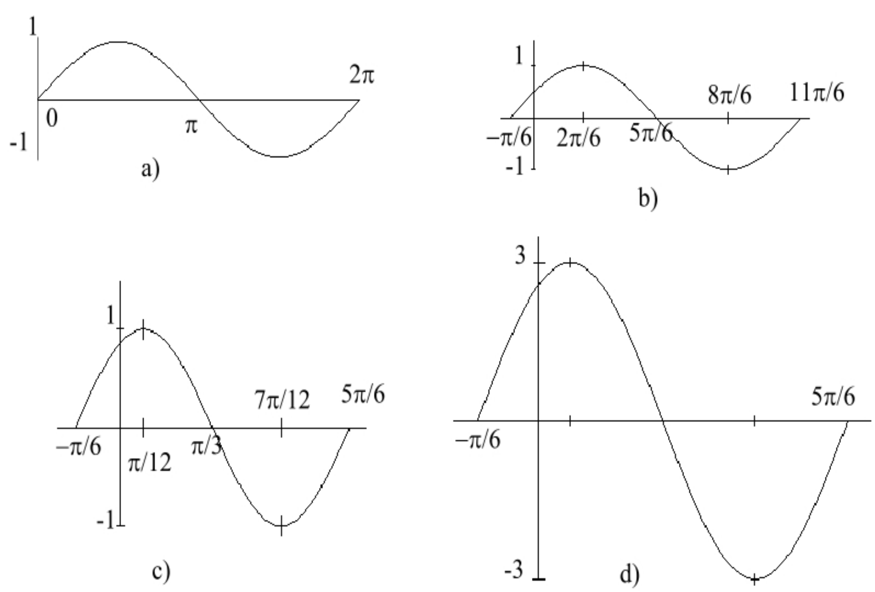
$2x+\pi/3$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
x	$-\pi/6$	$\pi/12$	$\pi/3$	$7\pi/12$	$5\pi/6$
$3\sin(2x+\pi/3)$	0	3	0	-3	0

Vidíme, že $g : \langle -\pi/6, 5\pi/6\rangle \longrightarrow \langle 0, 2\pi\rangle$ a funkce f má periodu π. (Obr. 2.13)

$\surd$ 2. řešení. Vyjdeme z grafu funkce a) $x \longmapsto \sin x$ v intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$ (délka jedné základní periody).

Postupně získáváme grafy (2.14):

- b) $\sin(x+\pi/6)$, posunutí (translace) o $-\pi/6$ ve směru osy x,
- c) $\sin 2(x+\pi/6)$, stažení (kontrakce) 1/2–krát vzhledem k ose x,
- d) $3\sin 2(x+\pi/6)$, roztažení (dilatace) 3–krát ve směru osy y.



Obrázek 2.14:

$\surd\surd$ **Komentář 2.8.1:** Funkce tohoto tvaru se vyskytují při studiu tzv. harmonických kmitů, kde se používá často označení $A\sin(\omega t+\varphi_0)$ a následující terminologie:

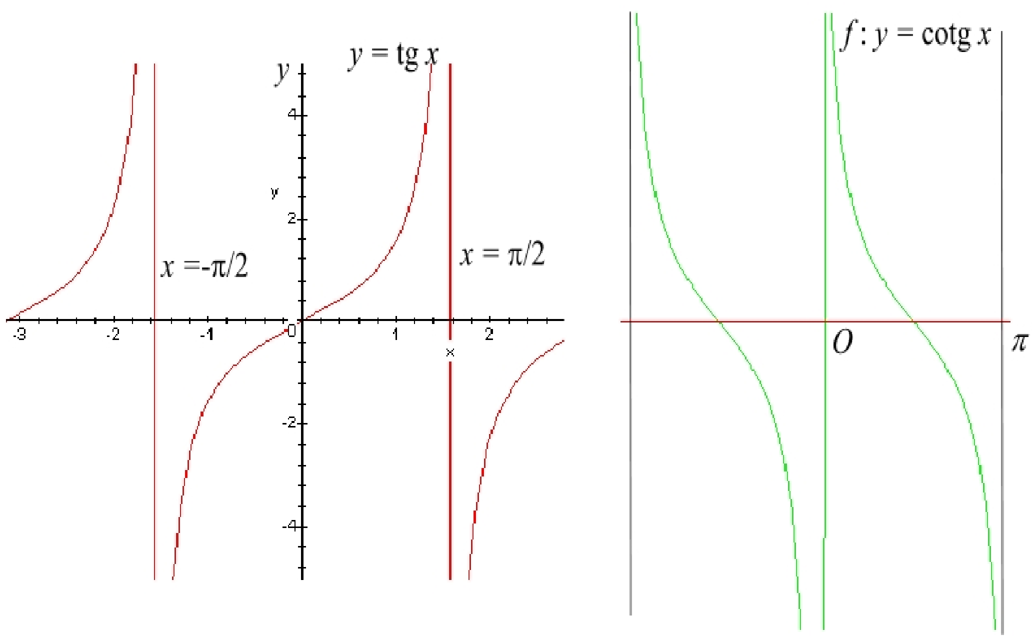
φ_0	počáteční fáze kmitavého pohybu
A	amplituda výchylky
ω	úhlová (kruhová) frekvence
$T = 2\pi/\omega$	perioda pohybu
$f = 1/T$	frekvence kmitavého pohybu

tangens, $f : y = \text{tg } x$	**kotangens**, $f : y = \text{cotg } x$
$D(f) = \mathbb{R} - \{(2k+1)\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\},\ H(f) = \mathbb{R}$, lichá, ryzí perioda π, rostoucí na každém intervalu $(-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi), k \in \mathbb{Z}$,	$D(f) = \mathbb{R} - \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\},\ H(f) = \mathbb{R}$, lichá, ryzí perioda π, klesající na každém intervalu $(k\pi, (k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}$,

Důležité vztahy (pro přípustná x) jsou například

$$\text{tg } x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \text{cotg } x = \frac{1}{\text{tg } x}, \quad \text{tg } (x_1 \pm x_2) = \frac{\text{tg } x_1 \pm \text{tg } x_2}{1 \mp \text{tg } x_1 \cdot \text{tg } x_2}.$$

Uvedeme si grafy obou funkcí v Obr. 2.15



Obrázek 2.15: Funkce tg x, cotg x.

2.8.2 Cyklometrické funkce

Cyklometrické funkce jsou inverzní funkce ke goniometrickým funkcím zúženým na konkrétně vybrané intervaly, v nichž jsou ryze monotónní.

Δ

Funkce

arkussinus arcsin, *arkuskosinus* arccos, *arkustangens* arctg, *arkuskotangens* arccotg, jsou definovány takto:

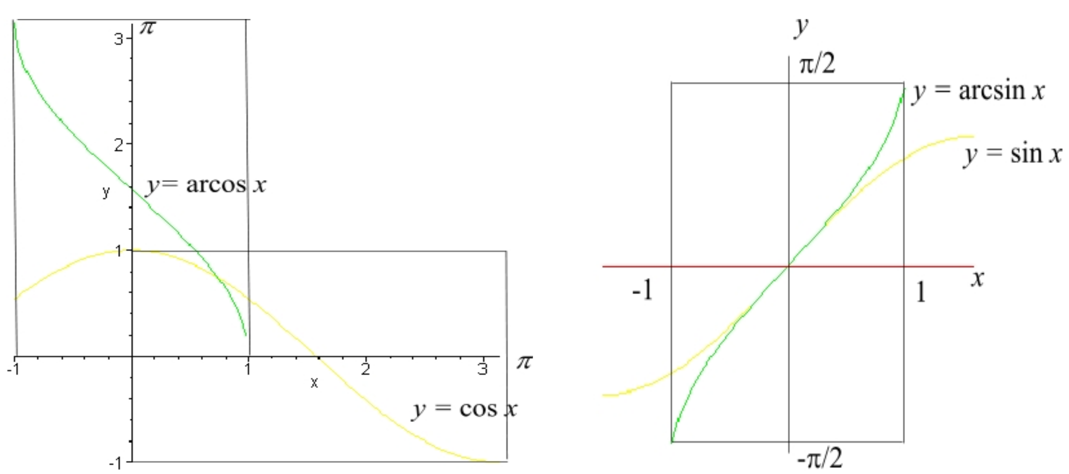
$$\begin{aligned} \arcsin &= (\sin/_{\langle -\pi/2, \pi/2\rangle})^{-1}, \\ \arccos &= (\cos/_{\langle 0, \pi\rangle})^{-1}, \\ \mathrm{arctg} &= (\mathrm{tg}/_{(-\pi/2, \pi/2)})^{-1}, \\ \mathrm{arccotg} &= (\mathrm{cotg}/_{(0, \pi)})^{-1}. \end{aligned}$$

Δ

arkussinus, $f: y = \arcsin x$	**arkuskosinus**, $f: y = \mathrm{arcos}\ x$
$D(f) = \langle -1, 1\rangle,\ H(f) = \langle -\pi/2, \pi/2\rangle$, lichá, rostoucí na $D(f)$	$D(f) = \langle -1, 1\rangle,\ H(f) = \langle 0, \pi\rangle$, ani lichá ani sudá, klesající na $D(f)$

Základní funkční hodnoty:

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\arccos x$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

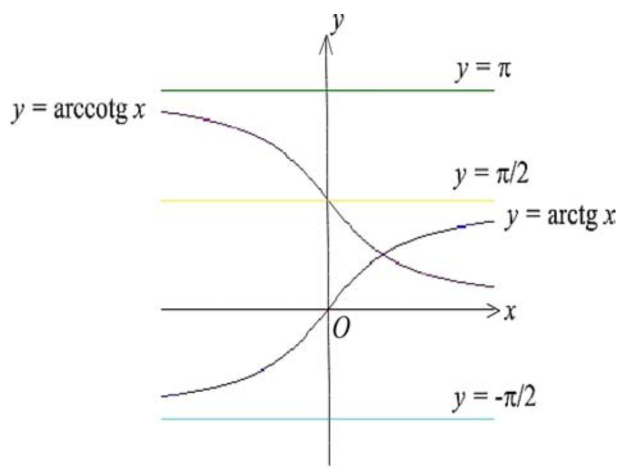


Obrázek 2.16:

arkustangens, $f: y = \mathrm{arctg}\ x$	**arkuskotangens**, $f: y = \mathrm{arcotg}\ x$
$D(f) = \mathbb{R},\ H(f) = (-\pi/2, \pi/2)$, lichá, rostoucí na $D(f)$	$D(f) = \mathbb{R},\ H(f) = (0, \pi)$, ani lichá ani sudá, klesající na $D(f)$

Základní funkční hodnoty:

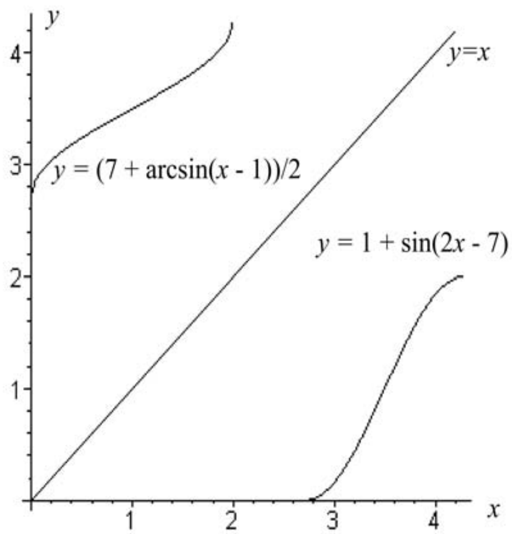
x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{arctg} x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\operatorname{arccotg} x$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$



Obrázek 2.17:

Příklad 2.8.2: Je dána funkce $f : y = 1 + \sin(2x - 7)$. Určete g^{-1} k funkci $g = f/_M$, kde M je maximální („největší“) podmnožina přirozeného definičního oboru funkce f, v níž existuje k této funkci funkce inverzní.

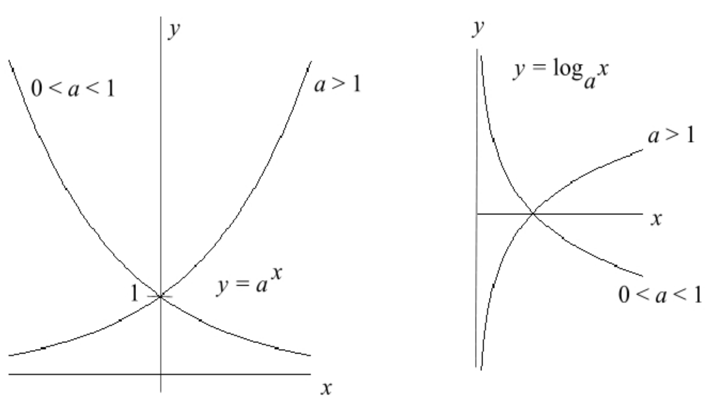
Řešení: Víme, že inverzní funkcí k funkci sinus je funkce arkussinus, přičemž sinus uvažujeme zúžený na interval $\langle -\pi/2, \pi/2\rangle$. Pro funkci g budeme proto požadovat splnění nerovnice $-\pi/2 \leq 2x - 7 \leq \pi/2$, tj. $7/2 - \pi/4 \leq x \leq 7/2 + \pi/4$. V tomto intervalu je funkce ryze monotónní a platí $f : \langle 7/2 - \pi/4, 7/2 + \pi/4\rangle \to \langle 0, 2\rangle$. Dále platí postupně $y - 1 = \sin(2x - 7) \Leftrightarrow 2x - 7 = \arcsin(y - 1) \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}(7 + \arcsin(y - 1))$ a tedy (viz obr. 2.18) $g^{-1} : y = \frac{1}{2}(7 + \arcsin(x - 1))$, přičemž $g^{-1} : \langle 0, 2\rangle \to \left\langle \frac{7}{2} - \frac{\pi}{4}, \frac{7}{2} + \frac{\pi}{4}\right\rangle$.



Obrázek 2.18:

2.8.3 Exponenciální a logaritmické funkce

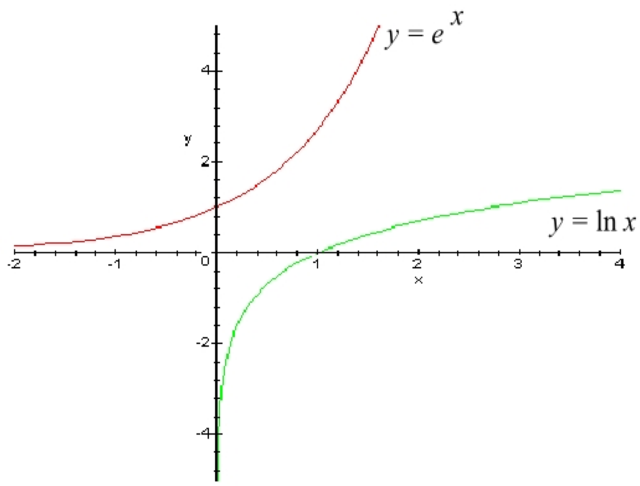
exponenciální funkce o základu a $f(x) = a^x,\ a \in \mathbb{R},\ a > 0,\ a \neq 1$	**logaritmická** funkce o základu a $g(x) = \log_a x,\ a \in \mathbb{R},\ a > 0,\ a \neq 1$
$D(f) = \mathbb{R},\ H(f) = (0, \infty)$, $a > 1 \Rightarrow f$ je rostoucí, $0 < a < 1 \Rightarrow f$ je klesající na $D(f)$.	$D(g) = (0, \infty),\ H(g) = \mathbb{R}$, $a > 1 \Rightarrow g$ je rostoucí, $0 < a < 1 \Rightarrow g$ je klesající na $D(g)$.
Pro všechna $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ platí : $a^{x_1+x_2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2}$, $a^{x_1-x_2} = a^{x_1}/a^{x_2}$, $(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 \cdot x_2}$.	Pro všechna $x_1, x_2 \in (0, \infty)$ platí : $\log_a (x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$, $\log_a x_1/x_2 = \log_a x_1 - \log_a x_2$, $\log_a x_1^k = k \cdot \log_a x_1,\ k \in \mathbb{R}$, $\log_b x_1 = \log_a x_1 / \log_a b$ pro $a, b \in \mathbb{R},\ a > 0,\ b > 0,\ a \neq 1 \neq b$.



Obrázek 2.19:

$\surd\surd$ **Komentář 2.8.2:**

1. Logaritmickou funkcí o základu a nazýváme inverzní funkci k funkci exponenciální o základu a, tj. platí
$$y = \log_a x \Longleftrightarrow x = a^y.$$
2. Vlastnosti logaritmické funkce plynou z vlastností exponenciální funkce.
3. Logaritmus o základu $e \doteq 2.71\ldots$ se nazývá *přirozený logaritmus* a značí se $\ln x$, logaritmus o základu 10 se nazývá *dekadický logaritmus* a značí se $\log x$.



Obrázek 2.20: Funkce e^x, $\ln x$

2.8.4 Mocninná funkce

mocninná funkce o exponentu a : $h(x) = x^a,\ a \in \mathbb{R},\ a \neq 0.$

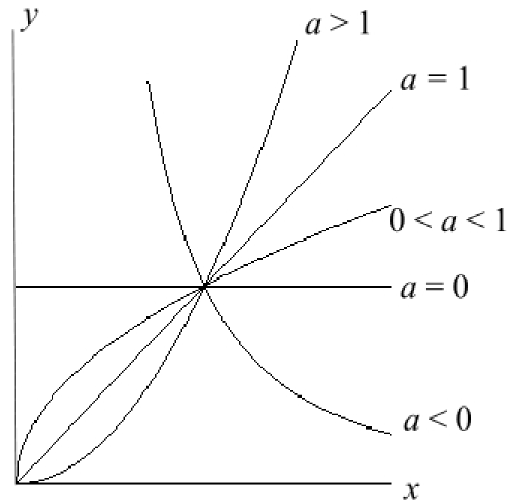
$D(h) = (0, \infty),\ H(h) = (0, \infty)$,
$a > 0 \Rightarrow h$ je rostoucí na $D(h)$, $a < 0 \Rightarrow h$ je klesající na $D(h)$.

Pro všechna $x_1, x_2 \in (0, \infty)$ platí : $(x_1 \cdot x_2)^a = {x_1}^a \cdot {x_2}^a,\ (x_1/x_2)^a = {x_1}^a/{x_2}^a$.

Definiční obor mocninné funkce lze rozšířit, omezíme-li hodnoty exponentu a. Například:

- pokud $a \in \mathbb{N}$, pak $D(h) = \mathbb{R}$,
- jestli

  (ι) $a \in \mathbb{Z}$, $a < 0$, pak $D(h) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$,



Obrázek 2.21: Funkce x^a

($\iota\iota$) $a \in \mathbf{Q}$, $a = m/n$, m, n nesoudělná, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$; n liché, pak pro

- $m > 0$ je $D(f) = \mathbb{R}$,
- $m < 0$ je $D(h) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

2.8.5 Hyperbolické funkce

V aplikacích se často pužívají *hyperbolické* funkce, které jsou definovány takto:

Δ

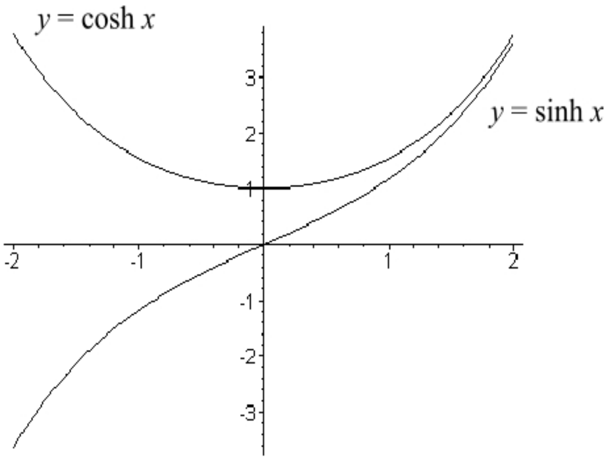
1. hyperbolický sinus: $\sinh x = (e^x - e^{-x})/2$,
2. hyperbolický kosinus: $\cosh x = (e^x + e^{-x})/2$,
3. hyperbolický tangens: tgh $x = \sinh x / \cosh x$,
4. hyperbolický kotangens: cotgh $x = \cosh x / \sinh x$,

Δ

Jejich název odpovídá tomu, že jejich užitím lze parametrizovat hyperbolu.

hyperbolický sinus: $f(x) = \sinh x$,	**hyperbolický kosinus**: $g(x) = \cosh x$
$D(f) = \mathbb{R},\ H(f) = \mathbb{R}$, lichá, rostoucí,	$D(g) = \mathbb{R},\ H(g) = \langle 1, \infty)$, sudá, klesající v $(-\infty, 0\rangle$, rostoucí v $\langle 0, \infty)$,

Grafem funkce hyperbolický kosinus je tzv. řetězovka (tvar ohebného vlákna zavěšeného ve dvou bodech).



Obrázek 2.22:

hyperbolický tangens: $h(x) = \mathrm{tgh}\ x$,	**hyperbolický kotangens**: $u(x) = \mathrm{cotgh}\ x$
$D(h) = \mathbb{R},\ H(h) = (-1, 1)$,	$D(u) = \mathbb{R} - \{0\},\ H(g) = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$,
lichá,	lichá,
rostoucí,	klesající v $(-\infty, 0)$, klesající v $(0, \infty)$,

Nyní si uvedeme stručný výběr nejzákladnějších vztahů mezi hyperbolickými funkcemi, které je možno využít například později při integrování funkcí.

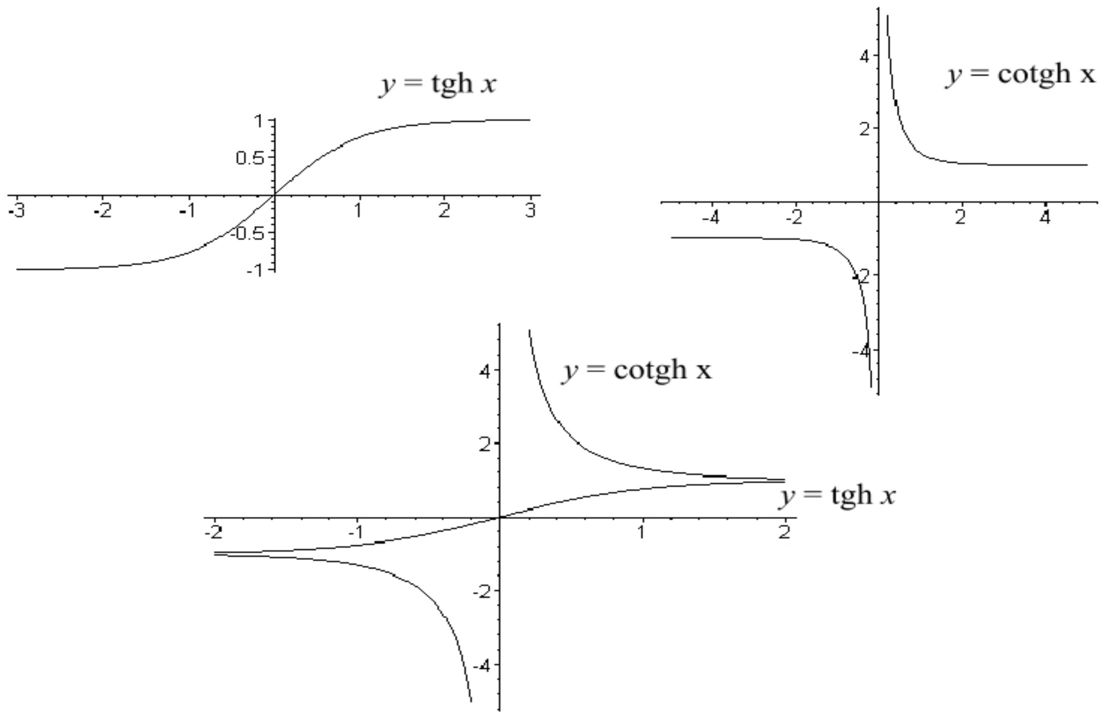
$$\begin{aligned}
\cosh^2 x_1 - \sinh^2 x_1 &= 1 \\
\sinh(x_1 \pm x_2) &= \sinh x_1 \cosh x_2 \pm \cosh x_1 \sinh x_2 \\
\cosh(x_1 \pm x_2) &= \cosh x_1 \cosh x_2 \pm \sinh x_1 \sinh x_2 \\
\sinh 2x_1 &= 2 \sinh x_1 \cosh x_1, \\
\cosh 2x_1 &= \sinh^2 x_1 + \cosh^2 x_1.
\end{aligned}$$

Uvedené vztahy si lze ověřit vyjádřením a úpravami odpovídajících vztahů s exponenciálními funkcemi.

Cvičení 2.8.1: Ověřte platnost vztahu $\cosh^2 x_1 - \sinh^2 x_2 = 1$. (Pozor na odlišnosti s podobnými vztahy platnými pro goniometrické funkce.)

2.8.6 Hyperbolometrické funkce

Na závěr přehledu elementárních funkcí se ještě stručně zmíníme o tzv. *hyperbolometrických* funkcích, což jsou inverzní funkce k funkcím hyperbolickým v intervalech ryzí monotonie. Definujeme:



Obrázek 2.23:

Δ

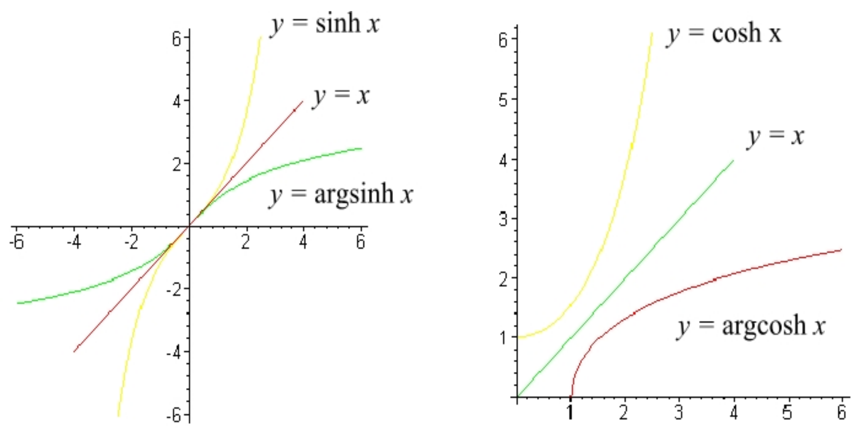
argsinh $= (\sinh)^{-1}$, čteme: *argument hyperbolického sinu*
argcosh $= (\cosh/_{\langle 0,\infty)})^{-1}$, čteme: *argument hyperbolického kosinu*
argtgh $= (\mathrm{tgh})^{-1}$, čteme: *argument hyperbolického tangens*
argcotgh $= (\mathrm{cotgh})^{-1}$, čteme: *argument hyperbolického kotangens*.

Δ

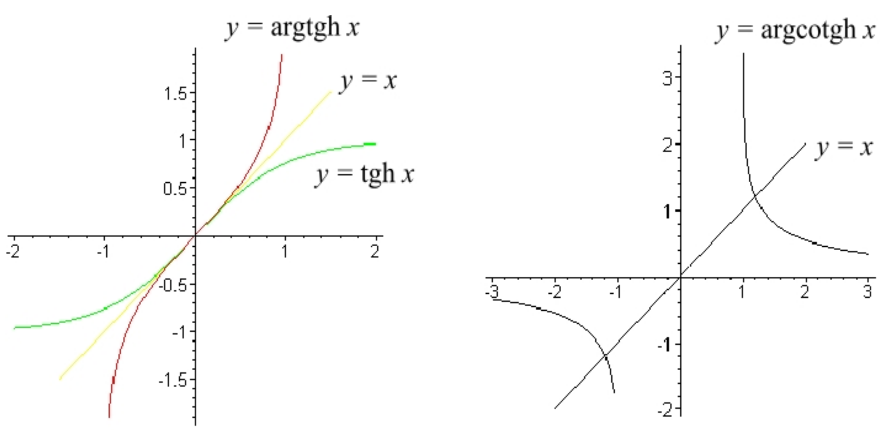
Víme již, že hyperbolické funkce byly definovány pomocí funkcí e^x a e^{-x}. Dá se ukázat, že hyperbolometrické funkce lze vyjádřit přirozenými logaritmy (tj. inverzními funkcemi k funkcím exponenciálním).

Platí

$$\begin{aligned}
&\operatorname{argsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right), \quad x \in \mathbb{R},\\
&\operatorname{argcosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right), \quad x \in \langle 1, \infty),\\
&\operatorname{argtgh} x = \tfrac{1}{2}\ln\tfrac{1+x}{1-x}, \quad x \in (-1, 1),\\
&\operatorname{argcotgh} x = \tfrac{1}{2}\ln\tfrac{x+1}{x-1}, \quad x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty).
\end{aligned}$$



Obrázek 2.24:



Obrázek 2.25:

2.8.7 Testovací úlohy

AUTOTEST 2.8.1: Inverzní funkce.

	funkce f definovaná na intervalu	inverzní funkce g k funkci f		
		a	b	c
1	$f(x) = 2x - 3$ $x \in \langle 1, 4\rangle$	$g(x) = \frac{x+3}{2}$ $x \in \langle -1, 5\rangle$	neexistuje	$g(x) = -2x - 3$ $x \in \langle -1, 4\rangle$
2	$f(x) = \sqrt{x+2}$ $x \in \langle -2, \infty)$	$g(x) = x^2 + 2$ $x \in \langle 6, \infty)$	$g(x) = x^2 - 2$ $x \in \mathbb{R}$	$g(x) = x^2 - 2$ $x \in \langle 0, \infty)$
3	$f(x) = 2x^2 - 1$ $x \in \mathbb{R}$	$g(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{2}}$ $x \in \langle -1, \infty)$	neexistuje	$g(x) = -\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{2}}$ $x \in \langle -1, \infty)$
4	$f(x) = 2x^2 - 1$ $x \in (-\infty, 0\rangle$	$g(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{2}}$ $x \in \langle -1, \infty)$	neexistuje	$g(x) = -\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{2}}$ $x \in \langle -1, \infty)$
5	$f(x) = e^{2x-1}$ $x \in \mathbb{R}$	$g(x) = e^{-2x-1}$ $x \in \mathbb{R}$	$g(x) = \frac{1}{2}(1 + \ln x)$ $x \in (0, \infty)$	$g(x) = e^{\frac{2}{x}-1}$ $x \in \mathbb{R} - \{0\}$
6	$f(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{4})$ $x \in \langle -\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}\rangle$	$g(x) = \arcsin(2x - \frac{\pi}{4})$ $x \in \langle -\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}\rangle$	neexistuje	$g(x) = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\arcsin x$ $x \in \langle -1, 1\rangle$
7	$f(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{4})$ $x \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$	$g(x) = \arcsin(2x - \frac{\pi}{4})$ $x \in \langle -1, 1\rangle$	neexistuje	$g(x) = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\arcsin x$ $x \in \langle -1, 1\rangle$

AUTOTEST 2.8.2: Vztahy mezi elementárními funkcemi

	pro x		a	b	c
1	$x \in \mathbb{R}$	$\cos^2 x - \sin^2 x =$	1	$\cos 2x$	$1 - \sin^2 x$
2	$x \in \mathbb{R}$	$\cosh^2 x - \sinh^2 x =$	1	$\cosh 2x$	$1 - \sinh^2 x$
3	$x \in \mathbb{R}$	$\cos^2 x =$	$\frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$	$\frac{1}{2}(1 + \sin 2x)$	$\frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$
4	$x \in \mathbb{R}$	$\sqrt{1 - \cos 2x - \sin^2 x}$	$= \sin x$	$= \cos x$	$= \lvert \sin x \rvert$
5	$x \in \mathbb{R}$	$\sin x =$	$2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$	$2 \sin \frac{x}{2}$	$\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right)$
6	$x \in \mathbb{R}$	$\sin^2 \frac{x}{2} =$	$\sin \frac{x^2}{4}$	$1 - \cos^2 \frac{x}{2}$	$\frac{1 - \cos x}{2}$
7	$x \in \mathbb{R}$	$\sin(2x - \pi/2) =$	$2 \sin(x - \pi/4)$	$-\cos 2x$	$-1 + \sin 2x$
8	$x > 0$ $a > 0$ $a \neq 1$	$\log_a x =$	$\frac{\ln a}{\ln x}$	$\ln \frac{x}{a}$	$\frac{\ln x}{\ln a}$
9	$x_1, x_2 > 0$ $a > 0$ $a \neq 1$	$\log_a(x_1 \cdot x_2) =$	$\log_a(x_1 + x_2)$	$\log_a x_1 + \log_a x_2$	$\log_a x_1 \cdot \log_a x_2$
10	$x \in \mathbb{R}$ $x \neq 0$	$\ln x^2 =$	$2 \ln x$	$\ln 2x$	$2 \ln \lvert x \rvert$
11	$x_1, x_2 \in \mathbb{R}$	$\lvert x_1 + x_2 \rvert$	$\geq \lvert x_1 \rvert + \lvert x_2 \rvert$	$= \lvert x_1 \rvert + \lvert x_2 \rvert$	$\leq \lvert x_1 \rvert + \lvert x_2 \rvert$
12	$x \in \langle -2, 0 \rangle$	$\lvert x - 2 \rvert - \lvert 5 - x \rvert =$	-3	$2x - 7$	$7 - 2x$
13	$x \in (-\infty, -1)$	$\sqrt{1 - 2x^2 + x^4} =$	není def.	$x^2 - 1$	$1 - x^2$

2.9 Kontrolní otázky

- Kdy hovoříme o explicitním zadání funkce f ?
- Co je to přirozený definiční obor funkce?
- Jak je definovaná absolutní hodnota reálného čísla?
- Uveďte základní vlastnosti, které platí pro absolutní hodnotu.
- Kdy řekneme, že je funkce f na množině $M \subset D(f)$ rostoucí (klesající)?
- Které funkce nazýváme ryze monotónní na množině M ?
- Jak definujeme sudost a lichost funkce?
- Kdy o funkci řekneme, že je periodická na M s periodou p ? Co je to základní perioda?
- Kdy hovoříme o parametrickém zadání funkce f ? Uveďte příklady.
- Kdy řekneme, že funkce f^{-1} je inverzní funkcí k funkci f na množině M ?
- Co platí pro grafy funkcí f a f^{-1} ?
- Co rozumíme reálným polynomem n–tého stupně?
- Kdy řekneme, že číslo x_0 je k–násobným kořenem polynomu stupně n ?
- Vysvětlete, co rozumíme rozkladem reálného polynomu v reálném oboru.
- Jaké body mají vliv na znaménko reálného polynomu?
- Jaké druhy racionálních funkcí znáte?
- Jaké znáte typy parciálních zlomků?
- Vysvětlete, jak se rozkládá ryzí racionální funkce na parciální zlomky.
- Co jsou to cyklometrické funkce? Jak jsou definovány? Nakreslete jejich grafy.
- Uveďte definice hyperbolických funkcí a načrtněte jejich grafy.

2.10 Klíč a výsledky cvičení

Cvičení 2.2.2

a) $f(x) = \begin{cases} -4x-1 & \text{pro} \quad x \in (-\infty; -2\rangle \\ -2x+3 & \text{pro} \quad x \in (-2; 1/3\rangle \\ 4x+1 & \text{pro} \quad x \in (1/3; \infty) \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 4 & \text{pro} \quad x \in (-\infty; -3/2\rangle \\ -4x-2 & \text{pro} \quad x \in (-3/2; 1/2\rangle \\ -4 & \text{pro} \quad x \in (1/2; \infty) \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2-1 & \text{pro} \quad x \in (-\infty; -1\rangle \cup \langle 1; \infty) \\ 1-x^2 & \text{pro} \quad x \in (-1; 1) \end{cases}$

Cvičení 2.3.1

a) $h(x) = \sqrt{x^3}, \quad k(x) = 1 + \sqrt{(x-1)^3}$

b) $h(x) = -1 - e^{-x}, \quad k(x) = 2 + e^{\frac{x}{2-x}}$

Cvičení 2.3.2

1) $\langle -\frac{3}{4}, \frac{2}{3} \rangle$

2) $4a + 2h + 3$

Cvičení 2.6.1

a) $g_2^{-1} : y = -\sqrt{2+x}$, $x \in \langle -2; \infty)$

b1) $f^{-1} : y = (x+2)^2$, $x \in (-\infty; -2\rangle$

b2) $h^{-1} : y = \sqrt[3]{\frac{x+1}{2}}$, $x \in \mathbb{R}$

Cvičení 2.7.1
Uvedeme pouze rozklady polynomů v reálném oboru, z nichž se požadovaná znaménka již lehce určí.

a) $f(x) = (3x-2) \cdot (2x-1)^2$

b) $g(x) = (x+2)\cdot(x^2+2)$

c) $h(x) = (2x+1)\cdot(2x-1)\cdot(2x^2+1)$

d) $k(x) = (3x^2+2)\cdot(2x^2+1)$

. . . .

Cvičení 2.7.2

a) $-\frac{1}{4} - \frac{2}{x} + \frac{\frac{85}{12}}{4x-1} + \frac{\frac{2}{3}}{x+2}$

b) $-\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x-2}$

c) $\frac{x}{x^2-x+2} - \frac{1}{x^2+x+2}$

d) $x+1+\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} + \frac{x-1}{x^2-x+2}$

. . . .

Autotest 2.4.1
1b, 2c, 3c, 4c, 5b, 6b i 6c

Autotest 2.7.1
1b, 2c, 3b i 3c, 4c, 5a i 5c, 6b i 6c, 7c, 8b, 9c, 10b

Autotest 2.8.1
1a, 2c, 3b, 4c, 5b, 6c, 7b

Autotest 2.8.2
1b, 2a, 3c, 4c, 5a i 5c, 6c, 7b, 8c, 9b, 10c, 11c, 12a, 13b

Rejstřík

Literatura

[1] Anton H., *Calculus with Analytic Geometry*, John Wiley, 1995.

[2] Brabec J., Martan F., Rozenský Z., *Matematická analýza* I, SNTL, Praha 1989.

[3] Daněček J. a kolektiv, *Sbírka příkladů z matematiky* I, VUT, FAST, CERM, Brno 2000.

[4] Drábek P., Míka S., *Matematická analýza* I, Západočeská univerzita v Plzni, Fakulta aplikovaných věd, Plzeň 1999.

[5] Jankovský Z., Průcha L., *Diferenciální počet* I, ČVUT, Fakulta elektrotechnická, Praha 1996.

[6] Jarník V., *Diferenciální počet* I, NČSAV, Praha 1963.

[7] Novák V., *Diferenciální počet v* $\mathbb{R}$ (skripta), Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta, Brno 1997.

[8] Tryhuk V., *Matematika* I_2, *Reálná funkce jedné reálné proměnné*, VUT, FAST, CERM, 2001.

[9] Veverka J., Slatinský E., *Matematika* I_3, *Diferenciální počet funkce jedné reálné proměnné*, VUT, FAST, CERM, Brno 1995.